

## Firing activities of a fractional-order FitzHugh-Rinzel bursting neuron model and its coupled dynamics

[Argha Mondal](#), [Sanjeev Kumar Sharma](#), [Ranjit Kumar Upadhyay](#)  & [Arnab Mondal](#)

[Scientific Reports](#) **9**, Article number: 15721 (2019) | [Cite this article](#)

2166 Accesses | 34 Citations | [Metrics](#)

# 分数阶 *FitzHugh-Rinzel* 簇发放神经元模型的 放电活动及其耦合动力学

---

## Firing activities of a fractional-order FitzHugh-Rinzel bursting neuron model and its coupled dynamics

---

**Author:** Argha Mondal, Sanjeev Kumar Sharma, Ranjit Kumar Upadhyay and Arnab Mondal

**DOI:** 10.1038/s41598-019-52061-4

**Dates:** Received December 2018

Translated by Na Zhao, School of Mathematics, SCUT.

Link to the Journal: [10.1038/s41598-019-52061-4](https://doi.org/10.1038/s41598-019-52061-4)

Scientific Reports 9(1)  
Vol. 9, No. 1 (2019) 15721

2023 年 6 月 7 日

# Firing activities of a fractional-order FitzHugh-Rinzel bursting neuron model and its coupled dynamics

Argha Mondal<sup>1</sup>, Sanjeev Kumar Sharma<sup>2</sup>, Ranjit Kumar Upadhyay<sup>2</sup> and Arnab Mondal<sup>2</sup>

*Computational Neuroscience Center, University of Washington, Seattle, Washington, USA*

*Department of Mathematics & Computing, Indian Institute of Technology (Indian School of Mines), Dhanbad, 826004, India.\**

可兴奋系统的分数阶动力学在物理上可以被描述为一种记忆依赖现象。它可以为某些类型的神经元模型产生多样化和迷人的振荡模式。为了解决这些特征，我们考虑了一个非线性快慢 FitzHugh-Rinzel (FH-R) 模型，该模型在一组固定参数下表现出椭圆簇发放，输入电流恒定。这种经典阶模型的推广为理解单个神经元动力学提供了广泛的神经元反应（规则尖峰、快速尖峰、簇发放、混合模式振荡等）。到目前为止，还不完全了解分数阶动力学在多大程度上可以重新设计可兴奋系统的放电特性。我们研究了经典阶系统如何改变其复杂的动力学，以及簇发放如何根据分数指数 ( $0 < \alpha \leq 1$ ) 进行稳定性和分岔分析，从而改变不同的振荡。这是由于分数阶动力学的记忆效应而发生的。分数阶 FH-R 模型的放电频率低于经典阶模型，即便它存在第一个尖峰延迟。此外，我们研究了具有小耦合强度的耦合 FH-R 神经元的反应，这些耦合强度在特定分数阶上同步。有趣的动力学特征表明，在这个分数阶系统中可以诱导的各种神经计算特征，从而丰富了功能神经元机制。

## Contents

1. 引言	2
2. 分数阶 FH-R 模型	2
3. 方法	3
3.1. 数值求解方案	3
3.2. 分数阶生物物理模型的特点	4
稳定性分析	4
数值结果	5
分岔分析	5
单一分数阶 FH-R 模型的兴奋性反应	8
耦合分数 FH-R 模型中的同步化	8
4. 结论	9
5. 致谢	11
6. 作者贡献	11
7. 竞争性利益	11
8. 其他信息	11
9. 开放存取	11
10. 条款和条件	11

---

\* [ranjit.chaos@gmail.com](mailto:ranjit.chaos@gmail.com)

## 1. 引言

集体振荡动力学和同步活动是动力系统的基本现象 [1, 2]. 它在计算神经科学中具有理论重要性和生物物理意义。数学生物物理模型 [3-6] 是表征神经系统的主要工具。神经动力学中最令人兴奋的一步是根据膜电位的数学模型来理解单个神经元的系统结构。各种类型的尖峰和簇发放是可兴奋细胞的动力学反应 [7, 8]。这种类型的研究分析了可兴奋系统的混沌行为。当数学模型被描述为单个神经元或网络时, 应用非线性动力学技术来研究新兴的振荡模式和同步现象。经典阶动态模型依赖于紧接的前一个响应, 但是分数阶导数依赖于所有先前的响应, 因此它具有记忆效应 [9-11]。它可以产生不同类型的多时间尺度神经元动力学 [12]。它为理解丰富的动态和神经元反应提供了广泛的范围 [13-16]。分数阶微积分起源于 L'Hospital 写给 Leibnitz 的一封信 [13-15]。现在, 它已成为一种有前途且可靠的数学工具, 包括遗传属性或记忆依赖现象 [13-17]。多时间尺度动力学的讨论在以前的一些文章中已经研究过在信号处理中具有潜在的重要性 [18, 19]。已经研究表明, 注入施加的正弦电流下新皮质锥体神经元的放电率可以用分数阶导数很好地近似 [20]。

许多研究人员研究分数阶动力系统 [21, 22]。结果表明, 它遵循幂律动力学 [23-25]。在人类记忆中, 幂律动力学在较早之前被研究过 [26, 27], 记忆依赖的准确性衰减的速率几乎等于  $t^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ 。幂律适应有助于描述生物系统的一些动力学行为 [12, 28]。近年来, 分数阶导数在模拟生物现象方面变得非常有用 [13-16, 29], 组织的粘弹性 [30]、组织电极接口 [31]、药物递送的动力学特性 [32, 33]、扩散过程 [34-36]、生物物理神经元模型和神经网络 [37-42]。已经发现认知行为可以使用分数动力学建模 [43]。观察到分数阶动力学用于前庭动眼系统 [44] 和敏感神经元 H1 的飞行运动 [28]。它可以包括突触的机制 [28] 以及可兴奋细胞的几何特性 [44, 45]。使用分数阶动力学分析单神经元模型, 例如 Hodgkin-Huxley(H-H), Morris-Lecar(M-L), FitzHugh-Nagumo(FHN), Hindmarsh-Rose(H-R) 模型等 [10, 39, 46-49]。在这项研究中, 已经证明孤立神经膜的分数阶动力学可以通过使用表现出椭圆簇发放的合适生物物理模型来分析。它反映了通过膜电压导致先前历史依赖性活动的信息变化率。分析了质变

不同的动力学性质对应的不同参数体系。本文研究了 FH-R 神经元 [50-52]。在分数阶域中, 大致了解具有稳定性和分岔场景的尖峰模式和尖峰频率。尖峰和簇发放之间的关系是一个重要的问题, 也是数学神经科学中一个迷人的现象, 特别是在神经编码中。簇发放呈现重复尖峰和静止状态之间的反复过渡。开关阶段取决于缓慢变化的树突电流刺激的强度。椭圆簇发放的一个令人兴奋的特征是出现尖峰活动和停止尖峰的频率不为零, 振荡的幅度可能很小 [53]。经实验研究, 这种类型的簇发放可以在控制啮齿动物下颌运动的三面神经中发现 [54]。

之前已经发现, 2D FHN 模型中的慢速变量会产生数学复杂性, 允许神经元模型的膜电压的各种动力学, 包括混沌。因此, 分数阶 FH-R 单神经元模型具有优异的定性特征, 表现出许多不同的动作电位振荡。研究了分数阶相称 FH-R 模型渐近稳定性分析的必要和充分条件。分岔表示静止状态和振荡状态之间的质变 [5, 6]。利用一定的固定参数集对分数阶 FH-R 模型进行了研究, 并以分数阶指数为主要参数, 通过解析分析推导了极限数值计算。因此, 经典秩序模型的这种推广会产生生物物理变异性。我们介绍了分数阶动力学对耦合振荡器不同融合中同步准则的影响。我们观察到了经典阶模型中不存在的各种分数阶的不同动态行为。

## 2. 分数阶 FH-R 模型

FitzHugh 和 Rinzel 介绍了 FH-R 模型 (1976 年, 在一篇未发表的文章中)[50,52-55], 这是经典的 FHN 神经元模型的修改版。2D FHN 模型 [3,4] 说明了与神经元兴奋性和尖峰产生有关的有趣的生物物理现象的几何解释。它表现出连续的尖峰, 有一个特定的外部刺激。然而, 它不能够产生皮质神经元中产生的各种迷人的放电模式。FH-R 神经元模型是 FHN 模型的改进版, 当它在一个特定的定点范围内变化时, 可以对某些参数产生丰富的放电活动。快慢子系统描述了该模型, 快速子系统由经典的 FHN 方程 [3] 组成, 慢速子系统是一维的。它在生物学上是合理的, 并且在计算上是有效的单神经元模型。对应的分数阶 FH-R 模

型被描述为:

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha v}{dt^\alpha} &= v - v^3/3 - w + y + I = f_1(v, w, y), \\ \frac{d^\alpha w}{dt^\alpha} &= \delta(a + v - bw) = f_2(v, w, y), \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} &= \mu(c - v - dy) = f_3(v, w, y),\end{aligned}\quad (1)$$

其中  $v, w$  和  $y$  分别代表膜电压、恢复变量和电流的慢速调制。  $I$  衡量外部刺激电流的恒定大小,  $\alpha$  是分数指数, 其范围在区间  $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ 。  $a, b, c, d, \delta$  和  $\mu$  是系统参数。当  $\alpha = 1$  时, 系统还原为原始的经典阶系统。  $\mu$  表示一个小参数, 决定了慢速系统变量  $y$ 。快速子系统 ( $v - w$ ) 在相平面上呈现一个松弛振荡器, 其中  $\delta$  是一个小参数。  $v$  以  $mV$ (毫伏) 表示。时间  $t$  的单位是  $ms$ (毫秒)[4,6,11]。它表现出强直的尖峰或静止状态, 这取决于  $I$  的固定值的参数集。二维 FHN 模型中的参数  $a$  对应于 FH-R 神经元模型的参数  $c$ [53,55]。如果我们降低  $a$  的值, 会导致两次簇发放之间的间隔更长, 但是存在一个相对固定的簇发放时间。随着  $a$  的增加, 簇发放间的间隔变得更短, 周期性的簇发放变化变成了强直的尖峰。

以前曾介绍过注入电流刺激和膜电位之间的关系, 以产生一个动作电位, 即尖峰 [10]。理想电阻-电容理论描述了无源电池膜的动态分析, 非理想电阻-电容电路图可以表征振荡行为 [10,16,39,56,57]。理论保留了膜电压行为。它在分析细胞膜的介电行为方面起着重要作用 [16,39,57]。在实验结果中观察到, 分数阶动力学遵循一般的幂律关系 [10,56]。在神经元的电学活动中, 表明幂律动力学遵循  $\alpha = 0.76$  和  $0.86$ , 分别代表温暖和寒冷的蛙坐骨神经元 [39]。电流-电压关系的非理想电容理论由分数阶导数描述如下,  $C \frac{d^\alpha v}{dt^\alpha} = I$ , 其中  $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 。它遵循幂律动力学, 并保留了膜电压变化中的记忆效应-[9-11,16,39]。我们在分数阶条件中考虑这种对比。膜电压和特定的膜电位变化可能会诱发作样活动, 从而导致癫痫发作样活动 [55]。它可能会在肌肉中引起对刺激的特定强度的反应。这类簇发放现象可以用一种更普遍的方式来探索, 这样它就可以跨越不同的研究领域 [55]。让我们研究一下分数阶快慢系统贡献不同的放电活动, 随着预先定义的各种固定参数集的分数阶指数的变化而出现和消失。

### 3. 方法

#### 3.1. 数值求解方案

为了研究 FH-R 模型的分数动力学, 我们考虑在 Caputo 意义上最熟悉的分数导数的定义 [13-15]。考虑变量  $x(t)$  对分数指数  $\alpha \in (0, 1)$  的分数阶导数, 如下所示

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x, t), \quad (2)$$

使用定义, 我们有

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} x(\tau) d\tau, \quad (3)$$

其中伽马函数定义为  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$ 。卡普托阶导数的另一个优点是常数的导数为零。整合该函数的所有先前活动是有效的, 该函数由一个遵循幂律动力学的函数加权。现在, 将 L1 方案 [9,41,42,58] 应用于公式 (3), 将分数阶导数近似为

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &\approx \frac{(dt)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} [x(t_{k+1}) - x(t_k)] [(N-k)^{(1-\alpha)} \right. \\ &\quad \left. - (N-1-k)^{(1-\alpha)}] \right],\end{aligned}\quad (4)$$

并结合公式 (2) 和 (4), 得到公式的数值解。(2) 可以被表述为

$$\begin{aligned}x(t_N) &\approx (dt)^{-\alpha} \Gamma(2-\alpha) f(x, t) + x(t_{N-1}) \\ &\quad - \left[ \sum_{k=0}^{N-2} [x(t_{k+1}) - x(t_k)] [(N-k)^{(1-\alpha)} \right. \\ &\quad \left. - (N-1-k)^{(1-\alpha)}] \right],\end{aligned}\quad (5)$$

其中,  $t_k$  代表第  $k$  个时间步长,  $t_k = k\Delta t$ 。在我们的数值结果中, 变量  $x$  被认为是  $x(v, w, y)$ 。膜电压 ( $v(t)$ ) 的分数阶导数的近似值为

$$\begin{aligned}v(t_N) &\approx (dt)^{-\alpha} \Gamma(2-\alpha) f_1(v, t) + v(t_{N-1}) \\ &\quad - \left[ \sum_{k=0}^{N-2} [v(t_{k+1}) - v(t_k)] [(N-k)^{(1-\alpha)} \right. \\ &\quad \left. - (N-1-k)^{(1-\alpha)}] \right],\end{aligned}\quad (6)$$

同样地,我们可以用数字推导出公式 (1) 中其他两个变量 ( $w$  和  $y$ ) 的表达式。因此,公式 (2) 的数值解为可以概括为由伽马函数加权的 markov 项与记忆轨迹之间的差异。记忆效应在分数阶系统中具有主要的功能作用,因为它整合了所有过去的活动。由伽马函数加权的 markov 项由  $(dt)^{-\alpha}\Gamma(2-\alpha)f(x,t)+x(t_{N-1})$  给出,记忆轨迹由  $[\sum_{k=0}^{N-2}[x(t_{k+1})-x(t_k)][(N-k)^{(1-\alpha)}-(N-1-k)^{(1-\alpha)}]]$  给出。记忆轨迹在  $\alpha = 1$  时没有影响,分数阶系统的行为与经典阶模型相似。当我们将分数阶数  $\alpha$  从 1 降低时,记忆轨迹中的非线性增加,系统动力学取决于时间。通过使用该方案对分数阶 FH-R 系统进行数值积分。我们考虑了不同的参数集,如下 [53,55]:  $a = 0.7, b = 0.8, d = 1, \delta = 0.008, c = -0.775, \mu = 0.0001$ , 设 I:  $I = 0.3125$ , 设 II:  $I = 0.4$ , 设 III:  $\mu = 0.18, I = 3$ , 设 IV:  $c = 1.3, \mu = 0.0001, I = 0.3125$ , 设 V:  $c = -0.908, \mu = 0.002, I = 0.3125$ , 其余参数与上述相似。我们用这些参数集对 FH-R 模型进行分析。系统显示出不同的放电模式,如椭圆簇发放、强直峰发放/规则峰发放、快速峰发放和高振幅单尖峰与小振幅振荡。对于与神经细胞的各种动态行为相对应的不同参数体系,研究了不同的放电活动和模式转换。

### 3.2. 分数阶生物物理模型的特点

#### 稳定性分析

系统 (1) 的定点点被推导为  $w^* = (v^* + a)/b, y^* = (c - v^*)/d, v^{*3} - 3v^*p = q$ , 其中  $p = (1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{d})$  和  $q = (3I - \frac{3a}{b} - \frac{3c}{d})$ 。根据三次多项式的判别式的性质  $F(v^*) = v^{*3} - 3v^*p = q$ , 系统 (1) 最多可以有三个平衡状态。在本研究中,假设 (A)  $bd < d + b$  成立(基于数据)。

**命题 1** 立方函数  $F(v^*)$  是严格递增的,并且只存在平衡状态的一个分支  $E(q) = (v^*(q), \frac{v^*(q)+a}{b}, \frac{c-v^*(q)}{d}), q \in \mathbb{R}$ , 对于系统 (1), 其中  $v^*(q) = F^{-1}(q)$ 。

**证明 1** 我们有  $F(v^*) = v^{*3} - 3v^*p$  和  $F'(v^*) = 3v^{*2} - 3p$ 。  $F$  的判别式由  $D(F') = \frac{36}{bd}(bd-d-b)$  给出。利用假设 (A), 我们得到  $D(F') < 0$ , 这意味着  $F'(v^*) >$ , 并且

函数  $F$  在  $\mathbb{R}$  上是严格递增的 (和可逆的)。故它只有一个实根  $v^*(q) = F^{-1}(q)$ 。系统 (1) 在定点  $E(v^*, w^*, y^*)$  的 *Jacobian* 由以下公式给出

$$J(v^*) = \begin{pmatrix} 1 - v^{*2} & -1 & 1 \\ \delta & -\delta b & 0 \\ -\mu & 0 & -\mu d \end{pmatrix}$$

特征多项式为

$$Q(\lambda) = \lambda^3 - (1 - v^{*2} - \delta b - \mu d)\lambda^2 + (\delta - \delta b + \mu - d\mu + bd\mu + b\delta v^{*2} + d\mu v^{*2})\lambda - (bd\delta\mu - b\delta\mu - d\delta\mu - bd\delta\mu v^{*2})$$

根据假设 (A) 和  $\det(J) = \mu\delta((bd - b - d) - b\delta v^{*2}) < 0$ , 我们得到特征多项式  $Q(\lambda)$  至少一个根是负的。考虑到参数  $d = 1$  的值 (对于所有参数集都是常数且固定的), 我们有  $Q(-\mu) = \mu(b\delta - \mu)$ 。如  $\mu < b\delta$  则  $Q(-\mu) > 0$ , 这意味着  $Q(\lambda)$  至少一个实根位于  $(-\infty, \mu)$ , 否则根位于  $[-\mu, 0)$ 。我们将讨论  $\mu < b\delta$  分析处理的情况, 并以类似的方式运行, 我们也可以得出  $\mu > b\delta$  的情况的分析结果。

系统通过 Hopf 分岔改变其稳定性, 当雅可比矩阵的迹线消失时, 即  $1 - v_H^2 - \delta b - \mu d = 0$ , 它给出  $v_H = -\sqrt{1 - \delta b - \mu}(\gamma_1)$  和  $v_H = \sqrt{1 - \delta b - \mu}(\gamma_2)$ 。  $v_H$  表示发生 Hopf 分岔的系统变量。

**命题 2** 系统 (1) 的平衡态  $E(q)$  对于任何  $q \leq F(\gamma_1)$  或  $q \geq F(\gamma_2)$  是渐近稳定的 (与分数指数  $\alpha$  无关)。

**证明 2** 假设我们采用  $q \leq F(\gamma_1)$  的情况, 则  $v^* = v^*(q) = F^{-1}(q) \leq \gamma_1 < 0$ 。另外, 如果  $q \geq F(\gamma_2)$ , then  $v^* = v^*(q) = F^{-1}(q) \geq \gamma_2$ 。这两种情况下都可以得到  $Q(1 - v^{*2} - \delta b - \mu) < 0$ 。因此,  $Q(\lambda)$  的负实根 ( $\lambda_1$ ) 位于  $(1 - v^{*2} - \delta b - \mu, -\mu)$  其他两个根分别满足  $\lambda_2 + \lambda_3 = 1 - v^{*2} - \delta b - \mu - \lambda_1 < 0$  和  $\lambda_2\lambda_3 = \frac{\det(J)}{\lambda_1} > 0$ 。从上面的讨论中, 我们可以得出结论, 根位于负实轴上, 因此平衡状态  $E(q)$  是渐近稳定的并且与分数指数无关。

**命题 3** 如果  $q \in (F(\gamma_1), F(\gamma_2))$ , 则系统 (1) 的平衡态  $E(q)$  是渐近稳定的, 如果  $(1 - v^{*2} - \delta b - \mu - \lambda_1)\sqrt{-\lambda_1} <$

$2\sqrt{-\det(J)} \cos \frac{\alpha\pi}{2}$ , 或等价地,

$$\alpha < \frac{2}{\pi} \arccos(\min(1, \max(0, \frac{(1 - v^{*2} - \delta b - \mu - \lambda_1)\sqrt{-\lambda_1}}{2\sqrt{-\det(J)}}))) \quad (7)$$

其中  $\lambda_1 = \lambda_1(q) \in (-\infty, -\mu)$  是特征多项式  $Q(\lambda)$  的最小根。

**证明 3** 我们已经证明最小的根  $\lambda_1 = \lambda_1(q) \in (-\infty, -\mu)$  和  $Q(\lambda)$  的另外两个根满足  $\lambda_2 + \lambda_3 = 1 - v^{*2} - \delta b - \mu - \lambda_1$ ,  $\lambda_2\lambda_3 = \frac{\det(J)}{\lambda_1} > 0$ 。现在, 根  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  满足渐近稳定性条件  $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ , 如果  $\lambda_2\lambda_3 > 0$  和  $\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\sqrt{\lambda_2\lambda_3}} < 2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})$  满足 [59]。替换  $\lambda_2 + \lambda_3$  和  $\lambda_2\lambda_3$  的值, 我们得到条件 (7)。

#### 数值结果

假设 (A) 适用于所有上述参数集, 因此系统 (1) 只存在一个平衡状态  $E(q)$  分支。对于参数集  $I$  和  $II$ , 我们还可以找到  $\gamma_1 = -\sqrt{1 - 0.8 * 0.08 - 0.0001} = -0.9674$ ,  $\gamma_2 = \sqrt{1 - 0.8 * 0.08 - 0.0001} = 0.9674$  和  $F(-0.9674) = -4.5331$ ,  $F(0.9674) = 4.5331$ 。根据命题  $II$ ,  $E(q)$  对于任何  $q \leq F(\gamma_1)$  或  $q \geq F(\gamma_2)$  是渐近稳定的, 或者等价地, 对于任何  $I < 0.1390$  或  $I > 3.1610$ , 与  $\alpha$  无关。当  $I \in (0.1390, 3.1610)$  时, 平衡态  $E(q)$  对于  $I$  和  $\alpha$  的某些值变得不稳定, 稳定性准则由命题 3 给出。现在, 假设施加的刺激值  $I = 0.3125 \in (0.1390, 3.1610)$ , 则平衡点对所有  $\alpha < 0.80828$  (集合  $I$ ) 都是稳定的。同样, 如果我们选择  $I = 0.4$ , 则  $\alpha < 0.6951$  (集合  $II$ ) 的平衡点是稳定的。参数集  $III$  的条件  $\mu > b\delta$  成立, 平衡解的稳定性由相同的条件 (7) 给出。因此, 平衡点对于所有  $\alpha < 0.95665$  都是渐近稳定的。集合  $IV$  的平衡点为  $E(0.54648, 1.5581, 0.75352)$ , 系统 (1) 具有由  $\lambda$  给出的实特征值  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\lambda_3 = (-0.00028055, 0.0613089, 0.576231)$ 。因此, 平衡点  $E$  是一个鞍点。此外, 在参数集  $V$  处,  $\alpha < 0.956455$  的平衡点是稳定的。

系统 (1) 的混沌行为可以使用必要条件  $\alpha > (2/\pi)\tan^{-1}(|\text{Im}(\lambda)|/|\text{Re}(\lambda)|)$  [60]。我们考虑参数集  $I$ 。系统有一个实平衡点  $E(-0.885098, -0.231373, 0.110098)$ , 该平衡点的

特征值由  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\lambda_3 = (-0.000196427, 0.076349 \pm 0.245811i)$  给出。平衡点  $E$  是指数为 2 的鞍点 [60,61]。现在, 使用上述条件, 我们得到系统 (1) 表现出  $\alpha > 0.80828$  的混沌。在参数集  $II$  处, 平衡点和特征值为  $E(-0.841243, -0.176554, 0.066243)$  和  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\lambda_3 = (-0.000204006, 0.114207 \pm 0.219938i)$ 。这里, 平衡点  $E$  是一个指数为 2 的鞍点。在这种情况下, 系统表现出  $\alpha > 0.6951$  的混沌。以类似的方式进行, 系统分别在参数集  $III$  和  $V$  的  $\alpha > 0.95665$  和  $\alpha > 0.956455$  表现出混沌。

#### 分岔分析

经典阶 FH-R 模型的分岔分析使用 MATCONT 软件进行。施加的刺激 ( $I$ ) 被视为主要参数, 其他参数固定在其基值,  $\mu = 0.0001$ 。静息状态通过超临界 Hopf 分岔分别在  $I = 0.138716$  ( $HB1$ ) 和  $I = 3.161277$  ( $HB2$ ) 消失 (见图1)。图中粗蓝线表示稳定平衡状态, 蓝色虚线表示不稳定平衡状态。系统分别具有稳定的焦  $I < 0.138716$  和结点  $I > 3.16277$ 。系统对  $0.13872 < I \leq 0.6$  和  $2.6 < I \leq 3.16128$  具有鞍点焦点。FH-R 模型在  $I = 0.3125$  处显示椭圆簇发放 (集合  $I$ ) [53], 但是, 当我们增加  $I$  的值 ( $0.4 < I \leq 0.6$ ) 时, 它显示了规则尖峰与簇发放的共存。此外, 随着  $I$  的增加, 系统表现出规则的尖峰。  $0.6 < I \leq 2.6$  系统具有鞍点, 在此区域中系统首先显示规则峰值, 然后随着  $I$  的增加而出现第一个峰值延迟。对于  $2.6 < I \leq 3.16128$ , 系统首先显示具有第一个尖峰延迟的常规尖峰, 但随着  $I$  的增加, 它显示了具有第一个尖峰延迟的不规则簇发放。粗绿线表示稳定极限循环, 而红色虚线表示不稳定极限循环。在经典阶模型中, Andronov-Hopf 分岔表示周期解的局部出现和消亡, 而在分数阶模型中, Hopf 分岔的邻近解被认为是系统的解。分数阶系统在任何平衡点周围的稳定性由变量  $n_i(\alpha, I) = \frac{\alpha\pi}{2} - |\arg(\lambda_i(I))|$ ,  $i = 1, 2, 3$ 。如果  $n_i(\alpha, I) < 0$  或  $n_i(\alpha, I) > 0$ , 则称系统在平衡点附近稳定或不稳定。变量  $n_i(\alpha, I)$  与经典序系统中特征值的实部具有类似的作用。因此, 分数阶系统中 Hopf 分岔发生的条件可以表述为 [62]: (I) 雅可比矩阵  $J$  有两个复共轭特征值和一个实特征值, 即  $D(Q(I^*)) < 0$ , 其中  $I^*$  是主要参数的临界值, (II)  $n_i(\alpha, I^*) = 0$  和  $\lambda_3(I^*) \neq 0$ , (III)  $\frac{\partial n_i}{\partial I}|_{I=I^*} \neq 0$ 。当参

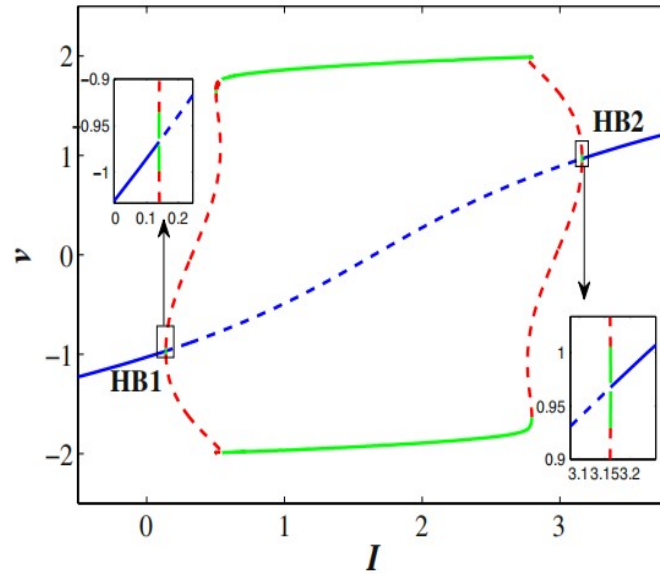


图 1: 经典阶 FH-R 模型相对于参数  $I$  的分岔情况, 并保持其他参数的基础值。粗实线和蓝色虚线分别表示系统的稳定和稳定的状态。绿色和红色的虚线分别表示稳定和稳定的极限循环。 $HB1$  和  $HB2$  代表 Hopf 分岔点。

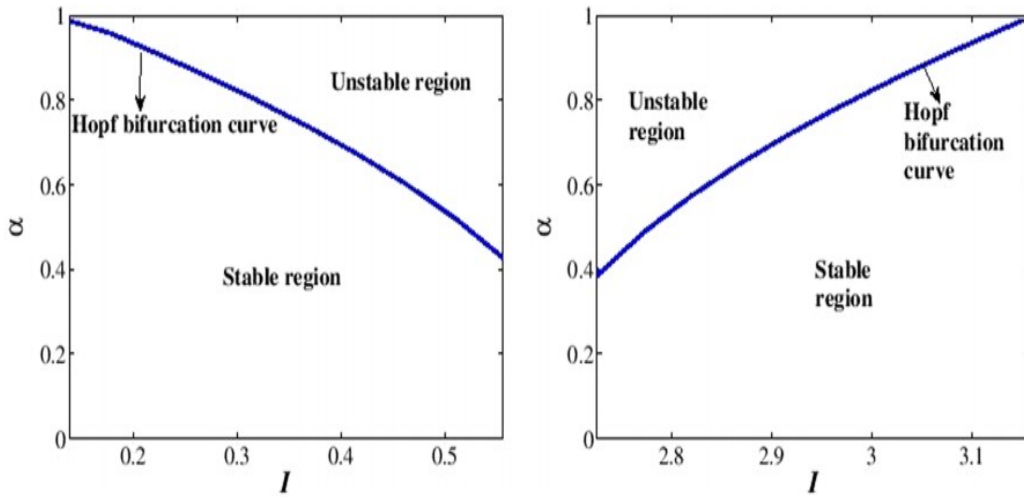


图 2: 分数阶系统 (1) 的分岔结果分别对应参数集  $I$  和  $II$ 。

数  $I \in (0.1390, 3.1610)$  时, 在系统 (1) 中发生 Hopf 分岔。图 2(a, b) 显示了  $(I, \alpha)$ -平面中平衡态  $E(q)$  的稳定/不稳定区域, 参数集分别为  $I$  和  $II$ 。图中的蓝色曲线是指从  $n_i(\alpha, I^*) = 0$  获得的方程给出的临界值  $\alpha^*$  的 Hopf 分岔曲线。假设我们取  $I = 0.3125$ , 则临界值为  $\alpha^*(0.3125) = 0.80828$ 。当  $\alpha < \alpha^*$  时, 系统 (1) 是渐近稳定的, 而对于  $\alpha > \alpha^*(0.3125)$  则不稳定。系统 (1) 存在 Hopf 分岔, 对于  $\alpha = \alpha^*(0.3125)$ 。我们没有

将数值分析的区域  $I \in [0.7, 2.6]$  视为  $D(Q(I)) > 0$ 。平衡状态对于分数指数  $\alpha$  的大多数值是渐近稳定的, 对于极少数  $\alpha$  值是不稳定的。对于  $I = 0.4$ , Hopf 分岔的临界值为  $\alpha^*(0.4) = 0.6951$ 。

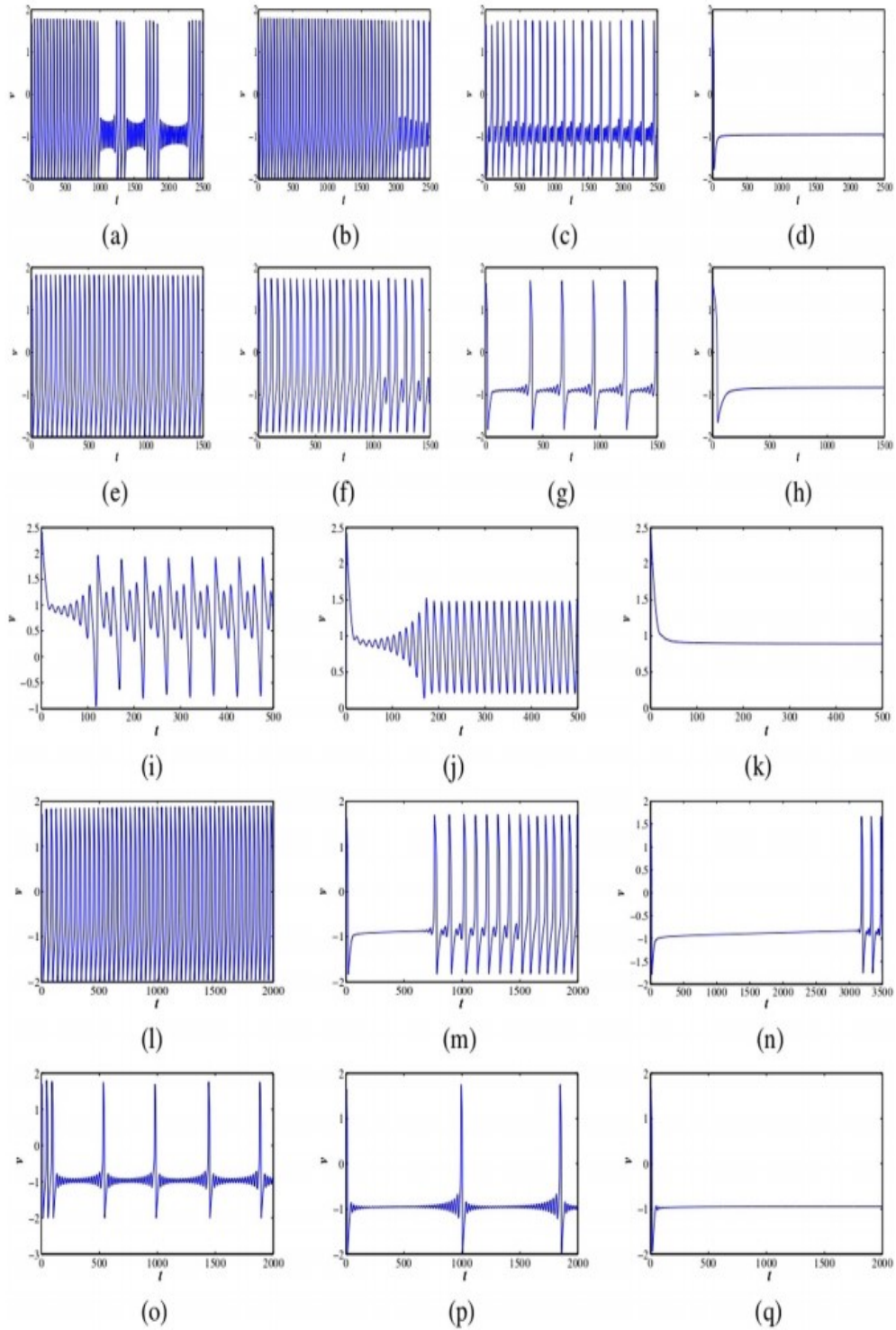


图 3: 分数阶 FH-R 模型 (1) 在不同分数指数  $\alpha$  下膜电压 ( $v$ ) 的不同神经元响应。第一组: (a-d)  $\alpha = 1, 0.98, 0.95$  和  $0.79$ (集合  $I$ )。第二组: (e-h)  $\alpha = 1, 0.92, 0.85$  和  $0.68$ (集合  $II$ )。第三组: (i-k)  $\alpha = 1, 0.99$  和  $0.95$ (集合  $III$ )。第四组: (l-n)  $\alpha = 1, 0.85$  和  $0.80$ (集合  $IV$ )。第五组: (o-q)  $\alpha = 1, 0.98$  和  $0.95$ (集合  $V$ )。



现在, 我们研究分数阶 FH-R 神经元模型来研究各种放电活动。我们评估了经典秩序动力学如何改变其神经元行为, 以及对于不同的分数指数的稳定性和分叉分析, 簇发放是如何改变不同的放电模式的。我们使用时间步长  $\Delta t = 0.1$  作为数值结果。我们将初始条件视为所有数值模拟中不动点周围的小随机扰动。这里的随机扰动取自区间  $(0, 1)$  中均匀分布的随机数。一个有趣的特征是整数阶 FH-R 模型在参数集  $I$  处产生椭圆簇发放。它在簇发放的静息阶段产生衰减和小幅度振荡的增长, 并且不会迅速阻尼。放电模式在每个簇发放中有多个尖峰, 在两个簇发放之间有一些亚阈值振荡 (见图3(a))。簇发放的活跃和静息阶段随着我们从经典/整数阶  $1$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) 慢慢减少分数指数而变化。在  $\alpha = 0.98$  处, 它显示快速尖峰, 一段时间后, 它产生具有高幅度单尖峰和低幅度振荡的混合模式振荡 (见图3(b))。当它进一步降低到  $\alpha = 0.95$  时 (见图3(c)), 它只显示混合模式振荡。分数阶系统在  $\alpha = 0.80828$  处有一个 Hopf 分岔, 当  $\alpha < 0.80828$  时, 系统进入静止状态, 即它收敛到稳定不动点 ( $v^* = -0.885098$ ) 在  $\alpha = 0.79$  处 (见图3(d))。现在, 我们考虑参数集  $II$ 。经典阶系统显示强直尖峰 (见图3(e))。当分数指数减小到  $\alpha = 0.92$  时, 它显示出从强直尖峰到具有高振幅和低振幅振荡的不同尖峰模式的转变 (见图3(f))。系统在  $\alpha = 0.85$  处显示混合模式振荡 (见图3(g))。当系统处于此转换模式时, 首先会出现尖峰延迟, 并且触发频率降低。然后, 系统在  $\alpha = 0.6951$  处表现出 Hopf 分岔, 并且对于  $\alpha < 0.6951$  进入完全静止状态, 如图3(h) 所示。(其中  $v^* = -0.841243$  和  $\alpha = 0.68$ )。接下来, 经典阶可兴奋模型产生另一个具有参数集  $III$  的尖峰模式 (见图3(i))。在  $\alpha = 0.99$  处, 它显示出相对于经典阶模型的规则低幅度峰值, 并且它具有第一个峰值延迟 (见图3(j))。此外, 它在  $\alpha = 0.95$  处收敛到静息状态 (见图3(k))。在这里, 系统也收敛到一个稳定的不动点 ( $v^* = 0.891229$ )。接下来, 我们考虑参数集  $IV$ 。经典阶数模型显示快速尖峰 (见图3(l))。然后, 它首先产生混合模式振荡, 然后在  $\alpha = 0.85$  处有规律地尖峰 (见图3(m))。随着分数阶数的降低和放电频率的降低, 系统具有第一个尖峰延迟减轻。系统中的第一个尖峰延迟随着分数指数  $\alpha = 0.80$  的减小而增加 (见图3(n))。

最后, 考虑了参数集  $V$ 。经典阶数模型表现出单个高振幅尖峰, 小幅度振荡不会衰减到完全  $ji$  静息相位或振荡消亡 (见图3(o))。当分数阶降低时, 尖峰频率降低, 小幅度振荡周期增加, 即随着  $\alpha = 0.98$  的持续时间延长 (见图3(p))。最后, 它在  $\alpha = 0.95$  处进入完全静息阶段, 即系统收敛到稳定不动点 ( $v^* = -0.948702$ ) (见图3(q))。

我们通过稳定性和分岔分析来表征这些不同的神经元反应。结果表明, 在  $\alpha = 1$  处,  $v$ -记忆轨迹为零。记忆轨迹不会影响  $\alpha = 1$  处的系统动态 (见图4(a, d))。当分数阶从经典阶降低时, 会出现新的动态响应。电压记忆轨迹显示振荡, 即它对膜电压动态有重大影响, 膜电压也会影响记忆轨迹 (见图4(b, e))。分数阶系统在较低分数阶下处于稳态,  $\alpha$  对于所有参数集, 即记忆轨迹变得太小, 并且它不能显著影响膜电压动力学以引起尖峰 (见图4(c, f))。因此, 分数阶可激励系统随着  $\alpha$  增加到一组固定参数的阈值以上而变化为不同的振荡。

#### 耦合分数 FH-R 模型中的同步化

为了研究耦合 FH-R 神经元的动力学, 我们考虑了分数域中的两个突触耦合 FH-R 神经元。通常, 突触耦合的可兴奋细胞根据耦合结构和强度产生同相或反相同步活性。我们展示了完成同步 (CS) 的转换 [37, 61, 63] 耦合分数阶可兴奋神经元的机制。我们使用双向耦合, 即两个 FH-R 神经元之间的电耦合, 这是生物物理有效的突触耦合机制

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha v_i}{dt^\alpha} &= v_i - v_i^3/3 - w_i + y_i + I + g_e(v_j - v_i), \\ \frac{d^\alpha w_i}{dt^\alpha} &= \delta(a + v_i - bw_i), \\ \frac{d^\alpha y_i}{dt^\alpha} &= \mu(c - v_i - dy_i), \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $g_{ei} = 12$  和  $j = 21$  是耦合强度。上述系统通过膜电压双向耦合。通过相似函数检验同步及其稳定性 [64]。这两个耦合系统的完全同步表明误差系统零解的稳定性。通过在不同的参数集中使用合适的耦合强度和适当的分数指数来实现所需的同步状态 (见图5)。现在, 我们引入一种称为

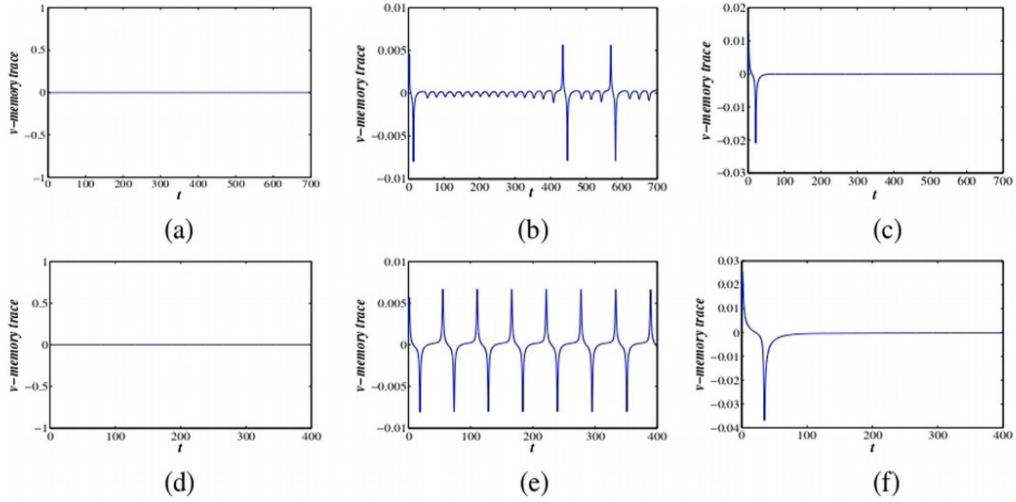


图 4: 分数指数下的电压记忆轨迹的动态 (a-c)  $\alpha = 1, 0.98, 0.79$  和 (d-f)  $\alpha = 1, 0.90, 0.69$ , 分别用于参数集  $I$  和  $II$ 。对于  $\alpha = 1$ , v-记忆轨迹对分数动力学没有影响。系统中的非线性随着我们降低分数阶 ( $\alpha$ ) 而增加, 系统在较低的  $\alpha$  值下没有显示出振荡。

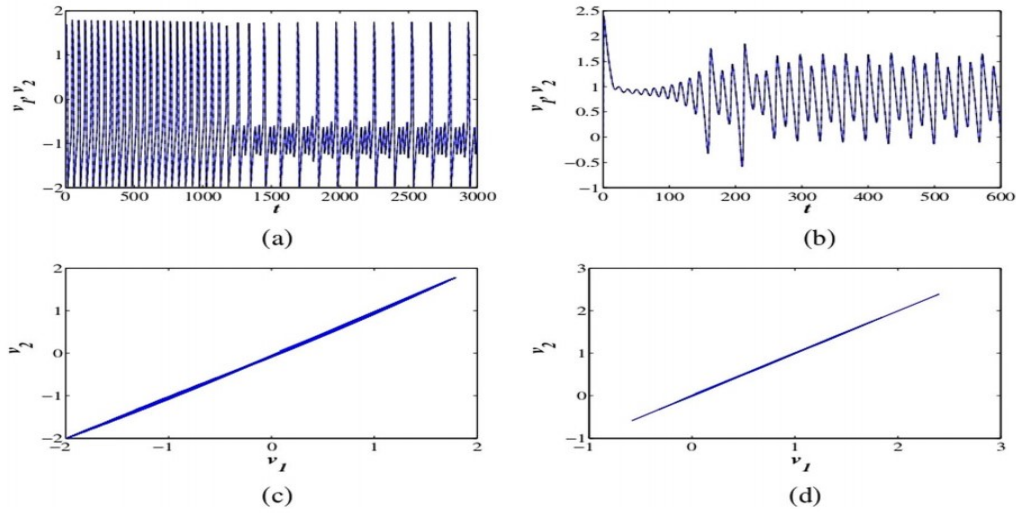


图 5: 兴奋性耦合分数阶 FH-R 模型的膜电位 (在  $\alpha = 0.99$ ), 对于具有电耦合强度的  $I$  和  $III$  (a)  $g_e = 0.55$  和 (b)  $g_e = 0.3$ 。 (c, d) 在相同的分数阶 ( $\alpha$ ) 和电耦合强度 ( $g_e$ ) 下的  $v_1$  与  $v_2$ 。膜电压变量  $v_1$  与  $v_2$  表示它们之间有很强的相关性, 并表现出 CS。

相似性函数的统计度量来估计耦合神经元振荡器之间的同步误差以产生 CS。该函数定义为  $S^2(\gamma) = \langle (v_1(t) - v_2(t - \gamma))^2 \rangle / (\langle v_1^2(t) \rangle \langle v_2^2(t) \rangle)^{1/2}$ , 并且  $S(\gamma)$  测量耦合可激励系统之间的相位滞后。较小的  $S(0)$  值表明驱动器和响应振荡器之间的高度相关性。功能值  $S(0)$  确认 CS (见图6), 因为它在不同的初始条件下收敛到零。验证了耦合方案和同步方法的有效性。

## 4. 结论

分数阶动力学在现实世界的应用中具有更多的优势。它可能产生复杂的动力学, 如切换到不同的稳定性、周期性和混沌行为。我们的非线性分数阶生物物理模型显示了这种类型的复杂动力学。理论分析和数值结果揭示了一些有趣的神经元反应, 对进一步研究分数阶可兴奋性系统很有帮助。本文通过使用一个相

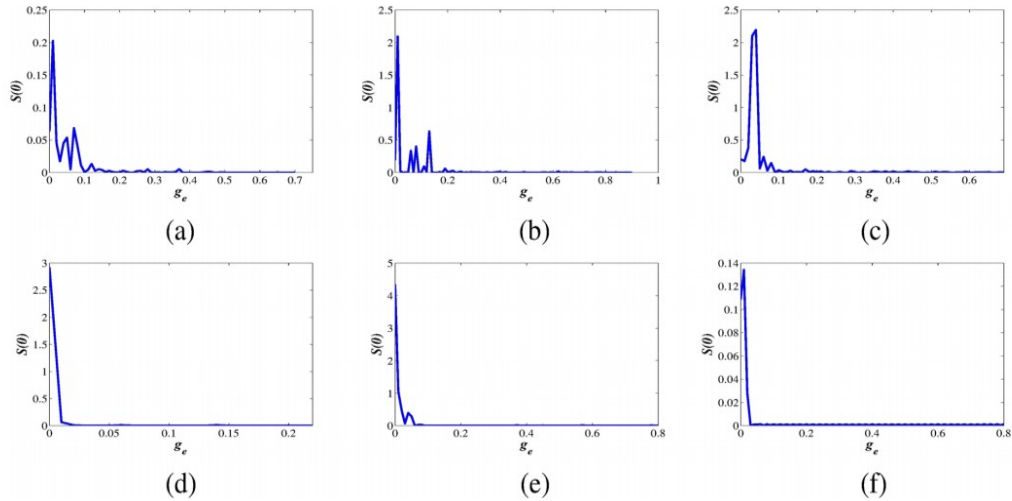


图 6: 分数阶耦合 FH-R 系统 (8) 的相似性函数与耦合强度, 分数阶耦合 FH-R 系统在参数集  $I$  和  $III$  处分别具有分数指数 (a d)  $\alpha = 1$ , (b e)  $\alpha = 0.99$  和 (c f)  $\alpha = 0.98$ 。随着耦合强度 ( $g_e$ ) 的增加, 耦合神经元振荡器之间的同步误差收敛为零, 在固定范围内确认振荡器之间的 CS。然而, 随着  $\alpha$  的进一步降低, 它不显示 CS。

称的分数阶导数来介绍快慢 FH-R 模型的特性。有研究表明, 分数指数如何影响系统的动力学, 使其与表现出椭圆簇发放的经典阶 FH-R 模型不同。它显示了不同类型的振荡; 基于不同参数集的尖峰频率。阶的分数指数在产生和破坏簇发放中起着重要的作用。它改变了系统动力学的性质。这也使我们了解耦合系统中的信息处理 [11,20,37,39]。分数阶可激发系统的同步化, 特别是混沌系统在控制安全通信方面有潜在的应用 [63]。我们观察到, 在快慢神经元模型中, 尖峰也会产生小的分数阶数。讨论了各种放电模式的转变状态, 包括具有不同参数集的不同分数阶的静止状态。我们工作的意义在于, 我们考虑了与生物相关的电耦合, 即两个神经元的双向耦合, 显示出不同类型的振荡, 并在分数阶耦合系统中建立了 CS 准则。它可以扩展到具有这种类型的分数阶神经元的神经网络, 用于双向或间隙连接耦合方案 [11,42]。当我们在系统中引入分数阶成分时, 选择具有适当参数集的合适的神经元模型, 表现出不同的动态行为, 已经成为一项具有挑战性的任务。对可激发生物物理系统的研究是有限的, 因为出现了不同的复杂数学解; 然而, 已经开发了一些技术来研究分数阶动力学。它可能在理解信号处理动态、噪声引起的电活动、神经元群体的突触机制、不同的神经计算特征、不同类型的神经网络在健康和疾病状态下 (如神经系统疾病) 的复杂大脑功能方

面发挥重要作用。需要进一步研究分数阶动力学, 以研究具有耦合性质的可兴奋单神经元模型和不同结构的兴奋-抑制神经元群体的动力学。

## 5. 致谢

作者非常感谢 Wondimu W. Teka 博士 (美国食品和药物管理局, 美国华盛顿特区), 感谢他对文章的宝贵建议和数字支持。这项工作得到了印度政府大学教育资助委员会 (UGC) 根据 NET-JRF 计划向作者 S. K. Sharma 和印度政府科学与工业研究委员会 (CSIR) 的支持, 授予作者 R. K. Upadhyay 的第 25(0277)/17/EMR-II) 号。

## 6. 作者贡献

Argha Mondal 设计了研究工作并分析了结果。Argha, Sanjeev K. Sharma 和 Arnab Mondal 进行了数值结果。Sanjeev 和 Arnab 得出了分析结果。Argha, Sanjeev, Ranjit Kumar Upadhyay 撰写了手稿。Ranjit Kumar Upadhyay 提出了建设性和有价值的建议。

## 7. 利益冲突

作者声明没有竞争性利益。

## 8. 其他信息

通讯和资料索取请联系 R.K.U。

转载和许可信息可在 [www.nature.com/reprints](http://www.nature.com/reprints)。

出版商注意到斯普林格-自然公司对出版的地图和机构的管辖权要求保持中立。

## 9. 开放存取

本文根据知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可, 该许可协议允许以任何媒介或格式使用、共享、改编、分发和复制, 只要您适当注明原作者和来源, 提供知识共享许可的链接, 并说明是否进行了更改。本文中的图像或其他第三方材料包含在文章的知识共享许可中, 除非在材料的信用额度中另有说明。如果材料未包含在文章的知识共享许可中, 并且您的预期用途

不受法律法规允许或超出允许的使用, 则需要直接获得版权所有者的许可。要查看此许可证的副本, 请访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>。

## 10. 条款和条件

Springer Nature 期刊内容, 由 Springer Nature 客户服务中心 GmbH(Springer Nature) 提供。

Springer Nature 支持作者、订阅者和授权用户合理分享研究论文 (用户), 用于小规模的个人、非商业用途, 前提是保持所有的版权、贸易和服务标记以及其他专有通知。通过访问、分享、接收或以其他方式使用《斯普林格自然》杂志的内容, 你同意这些使用条款 (Terms)。为了这些目的, Springer Nature 认为学术用途 (研究人员和学生) 是不商业的。

这些条款是补充性的, 除了适用于任何适用的网站条款和条件外, 还将适用于相关的网站许可证或个人订阅。这些术语将优先于任何与相关术语、网站许可证或个人订阅有关的冲突或模糊性 (仅在冲突或模糊性的范围内)。对于知识共享许可的文章, 所使用的知识共享许可条款将适用。

我们收集并使用个人数据来提供对 Springer Nature 期刊内容的访问。我们也可以在 ResearchGate 和 Springer Nature 内部使用这些个人数据, 并按照约定以匿名的方式分享, 用于跟踪、分析和报告。否则, 我们将不会在 ResearchGate 或 Springer Nature 公司集团之外披露您的个人数据, 除非我们有您的许可, 详见隐私政策。

虽然用户可能将 Springer Nature 期刊内容用于小规模、个人非商业用途, 但需要注意的是, 用户可能不会:

1. 使用这些内容的目的是为其他用户提供定期或大规模的访问, 或作为规避访问控制的手段;
2. 如果使用这些内容, 在任何司法管辖区都被认为是刑事或法定犯罪, 或引起民事责任, 或其他非法行为;
3. 除非斯普林格自然公司的书面明确同意, 否则错误地或误导性地暗示或建议认可、批准、赞助或关联;
4. 使用机器人或其他自动化方法来访问内容或重

定向信息;

5. 覆盖任何安全功能或排除性协议; 或

6. 分享内容, 以创建 Springer Nature 产品或服务的替代品, 或 Springer Nature 期刊内容的系统数据库。

根据对商业使用的限制, Springer Nature 不允许创造一种产品或服务, 从我们的内容中创造收入、版税、租金或收入, 也不允许将其作为付费服务或其他商业收益的一部分。Springer Nature 期刊的内容不能用于图书馆间的贷款, 图书馆员不得将 Springer Nature 期刊的内容大规模上传到他们或任何其他机构的资料库。

这些使用条款被定期审查, 并可在任何时候进行修改。Springer Nature 没有义务在这个网站上发布任何信息或内容, 可以在任何时候, 无论是否有通知, 可以由我们自己决定删除它或功能。《斯普林格-自然》可以在任何时候向你撤销该许可, 并删除对已保存的斯普林格-自然杂志内容的任何副本的访问。

在法律允许的最大范围内, 斯普林格自然公司不向用户提供任何保证、表述或保证, 无论是对斯普林格自然公司期刊内容的表达还是暗示, 所有各方都不承认和放弃任何法律规定的隐含保证或保证, 包括对任何特定目的的适销性或适用性。

请注意, 这些权利并没有自动扩展到可能从第三方授权的 Springer Nature 发布的内容、数据或其他材料。如果你想使用或分发我们的 Springer Nature 期刊内容给更多的人, 或定期使用或以任何其他不受这些术语明确允许的方式, 请联系 Springer Nature: [line-service@springernature.com](mailto:line-service@springernature.com)

## 参考文献

1. Pikovsky, A., Rosenblum, M. & Kurths, J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
2. Tarasov, V. E. & Zaslavsky, G. M. Fractional dynamics of coupled oscillators with long-range interaction. *Chaos* 16, 023110 (2006).
3. FitzHugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys J* 1, 445-466 (1961).
4. FitzHugh, R. *Mathematical Models of Excitation and Propagation in Nerve* (ed. Schawm, H. P.) (McGraw-Hill, New York, 1969).
5. Izhikevich, E. M. Neural excitability, spiking and bursting. *Int J Bifurcat Chaos* 10, 1171 - 1266 (2000).
6. Izhikevich, E. M. Simple model of spiking neurons. *IEEE Trans Neural Netw* 14, 1569-1572 (2003).
7. Connors, B. W. & Gutnick, M. J. Intrinsic firing patterns of diverse neocortical neurons. *Trends Neurosci* 13, 99-104 (1990).
8. Dupont, G., Falcke, M., Kirk, V. & Sneyd, J. Neurons and other excitable cells. In *Models of Calcium Signalling* (Springer, Cham, 2016).
9. Teka, W., Marinov, T. M. & Santamaria, F. Neuronal spike timing adaptation described with a fractional leaky integrate-and-fire model. *PLoS Comput Biol* 10, e1003526 (2014).
10. Weinberg, S. H. Membrane capacitive memory alters spiking in neurons described by the fractional-order Hodgkin-Huxley model. *PLoS One* 10, e0126629 (2015).
11. Teka, W. W., Upadhyay, R. K. & Mondal, A. Spiking and bursting patterns of fractional-order Izhikevich model. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 56, 161-176 (2018).
12. Ulanovsky, N., Las, L., Farkas, D. & Nelken, I. Multiple time scales of adaptation in auditory cortex neurons. *J Neurosci* 24, 10440-10453 (2004).
13. Oldham, K. B. & Spanier, J. *The Fractional Calculus* 17 (Academic Press, New York, 1974).
14. Podlubny, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. (Academic Press, Cambridge, 1998).
15. Podlubny, I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fract Calc Appl Anal* 5, 367-386 (2002).
16. Magin, R. L. Fractional calculus in bioengineering, part 1. *Crit Rev Biomed Eng* 32, 1-104 (2004).
17. Du, M., Wang, Z. & Hu, H. Measuring memory with the order of fractional derivative. *Sci Rep* 3, 3431 (2013).
18. Zhou, Y., Ionescu, C. & Tenreiro Machado, J. A. Fractional dynamics and its applications. *Nonlinear Dyn* 80, 1661-1664 (2015).
19. La Camera, G. et al. Multiple time scales of temporal response in pyramidal and fast spiking cortical neurons. *J Neurophysiol* 96, 3448-3464 (2006).
20. Lundstrom, B. N., Higgs, M. H., Spain, W. J. & Fairhall, A. L. Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons. *Nat Neurosci* 11, 1335-1342 (2008).
21. Petras, I. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. (Higher Education Press, Beijing, 2011).
22. Wen, S. F., Shen, Y. J., Wang, X. N., Yang, S. P. & Xing, H. J. Dynamical analysis of strongly nonlinear fractional-order Mathieu-Dufng equation.

Chaos 26, 084309 (2016).

23. Tenreiro Machado, J. A., Duarte, F. B. & Duarte, G. M. Fractional dynamics In financial indices. *Int J Bifurcat Chaos* 22, 1250249 (2012).

24. Machado, J. T., Pinto, C. M. & Lopes, A. M. A review on the characterization of signals and systems by power-law distributions. *Signal Process* 107, 246–253 (2015).

25. Edelman, M. On stability of fixed points and chaos in fractional systems. *Chaos* 28, 023112 (2018).

26. Kahana, M. J. *Foundations of Human Memory*. (Oxford University Press, New York, 2012).

27. Donkin, C. & Nosofsky, R. M. A power-law model of psychological memory strength in short-and long-term recognition. *Psychol Sci* 23, 625–634 (2012).

28. Fairhall, A. L., Lewen, G. D., Bialek, W. & Van Steveninck, R. R. D. R. Multiple timescales of adaptation in a neural code. *Adv Neural Inf Process Syst*, 124–130 (2001).

29. Caputo, M. Linear models of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent-II. *Geophys J Int* 13, 529–539 (1967).

30. Magin, R. L. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Comput Math Appl* 59, 1586–1593 (2010).

31. Magin, R. L. & Ovadia, M. Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus. *J Vib Control* 14, 1431–1442 (2008).

32. Dokoumetzidis, A. & Macheras, P. Fractional kinetics in drug absorption and disposition processes. *J Pharmacokinet Pharmacodyn* 36, 165–178 (2009).

33. Petras, I. & Magin, R. L. Simulation of drug uptake in a two compartmental fractional model for a biological system. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 16, 4588–4595 (2011).

34. Goychuk, I. & Hanggi, P. Fractional diffusion modeling of ion channel gating. *Phys Rev E* 70, 051915 (2004).

35. Yin, H. & Wen, X. Pattern formation through temporal fractional derivatives. *Sci Rep* 8, 5070 (2018).

36. Sierociuk, D. et al. Diffusion process modeling by using fractional-order models. *Appl Math Comput* 257, 2–11 (2015).

37. Upadhyay, R. K., Mondal, A. & Teka, W. W. Fractional-order excitable neural system with bidirectional coupling. *Nonlinear Dyn* 87, 2219–2233 (2017).

38. Kaslik, E. & Sivasundaram, S. Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order neural networks. *Neural Netw* 32, 245–256 (2012).

39. Shi, M. & Wang, Z. Abundant bursting patterns of a fractional-order Morris-Lecar neuron model. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 19, 1956–1969 (2014).

40. Upadhyay, R. K. & Mondal, A. Dynamics of fractional-order modified Morris-Lecar neural model. *Netw Biol* 5, 113–136 (2015).

41. Teka, W. W., Upadhyay, R. K. & Mondal, A. Fractional-order leaky integrate-and-fire model with long-term memory and power-law dynamics. *Neural Netw* 93, 110–125 (2017).

42. Mondal, A. & Upadhyay, R. K. Diverse neuronal responses of a fractional-order Izhikevich model: journey from chattering to fast spiking. *Nonlinear Dyn* 91, 1275–1288 (2018).

43. Drew, P. J. & Abbott, L. F. Models and properties of power-law adaptation in neural systems. *J Neurophysiol* 96, 826–833 (2006).

44. Anastasio, T. J. The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons. *Biol Cybern* 72, 69–79 (1994).

45. Anastasio, T. J. Nonuniformity in the linear network model of the oculomotor integrator produces approximately fractional-order dynamics and more realistic neuron behavior. *Biol Cybern* 79, 377 - 391 (1998).
46. Brandibur, O. & Kaslik, E. Stability properties of a two-dimensional system involving one Caputo derivative and applications to the investigation of a fractional-order Morris-Lecar neuronal model. *Nonlinear Dyn* 90, 2371-2386 (2017).
47. Kaslik, E. & Neamtu, M. Stability and Hopf bifurcation analysis for the hypothalamic-pituitary-adrenal axis model with memory. *Math Med Bio* 35, 49-78 (2016).
48. Brandibur, O. & Kaslik, E. Stability of two-component incommensurate fractional-order systems and applications to the investigation of a FitzHugh-Nagumo neuronal model. *Math Method Appl Sci* 41, 7182-7194 (2017).
49. Teka, W., Stockton, D. & Santamaria, F. Power-law dynamics of membrane conductances increase spiking diversity in a Hodgkin-Huxley model. *PLoS Comput Biol* 12, e1004776 (2016).
50. Rinzel, J. & Troy, W. C. Bursting phenomena in a simplified Oregonator fow system model. *J Chem Phys* 76, 1775-1789 (1982).
51. Honorkamp, J., Mutschler, G. & Seitz, R. Coupling of a slow and a fast oscillator can generate bursting. *Bull Math Biol* 47, 1-21 (1985).
52. Rinzel, J. A Formal Classification of Bursting Mechanisms in Excitable Systems, in *Mathematical Topics in Population Biology, Morphogenesis and Neurosciences, Lecture Notes in Biomathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 71, 267-281 (1987).
53. Izhikevich, E. M. Synchronization of elliptic bursters. *Siam Rev* 43, 315-344 (2001).
54. Belykh, V. N. & Pankratova, E. V. Chaotic synchronization in ensembles of coupled neurons modeled by the FitzHugh-Rinzel system. *Radiophys quant el* 49, 910-921 (2006).
55. Wojcik, J. & Shilnikov, A. Voltage interval mappings for an elliptic bursting model. In *Nonlinear Dynamics New Directions* (eds Gonzalez-Aguilar, H. & Ugalde, E.) 12, 195-213 (Springer, Cham, 2015).
56. Cole, K. S. Electric conductance of biological systems. In: *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology* 1, 107116 (Cold Spring Harbor Laboratory Press, New York, 1933).
57. Westerlund, S. & Ekstam, L. Capacitor theory. *IEEE Trans Dielectr Electr Insul* 1, 826-839 (1994).
58. Oldham, K. B. & Spanier, J. *The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.* (Dover Publications, New York, 2006).
59. Kaslik, E. Analysis of two-and three-dimensional fractional-order Hindmarsh-Rose type neuronal models. *Frac Cal Appl Anal* 20, 623 - 645 (2017).
60. Tavazoei, M. S. & Haeri, M. A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems. *Phys Lett A* 367, 102-113 (2007).
61. Odibat, Z., Corson, N., Aziz-Alaoui, M. A. & Alsaedi, A. Chaos in fractional-order cubic Chua system and synchronization. *Int J Bifur Chaos* 27, 1750161 (2017).
62. Abdelouahab, M. S., Hamri, N. E. & Wang, J. Hopf bifurcation and chaos in fractional-order modified hybrid optical system. *Nonlinear Dyn* 69, 275 - 284 (2012).
63. Li, C., Chen, Y. & Kurths, J. Fractional calculus and its applications. *Philos Trans R Soc A* 371, 20130037 (2013).
64. Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S. & Kurths,



J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. Phys Rev Lett 78, 4193 (1997).