

蓝天灾难

Andrey Shilnikov^[1], Dr. Dmitry Turaev^[2]

1. 数学系, GSU, 亚特兰大, GA,
2. 本古里安大学

Andrey Shilnikov and Dmitry Turaev (2007), Scholarpedia, 2(8):1889.

doi:10.4249/scholarpedia.1889

revision #137318 [[link to/cite this article](#)]

这个惊人的名字被赋予了周期轨道的七个已知主要分岔中的最后一个。虽然前六个分岔已经知道了近 70 年 [Andronov and Leontovich 1937, Andronov et al. 1966], 蓝天灾难 (见图1) 最近被发现和研究 [Turaev and L. Shilnikov 1995, 1996; Gavrilov and A. Shilnikov 2000; L. Shilnikov et al., 2001, A. Shilnikov et al. 2005]。

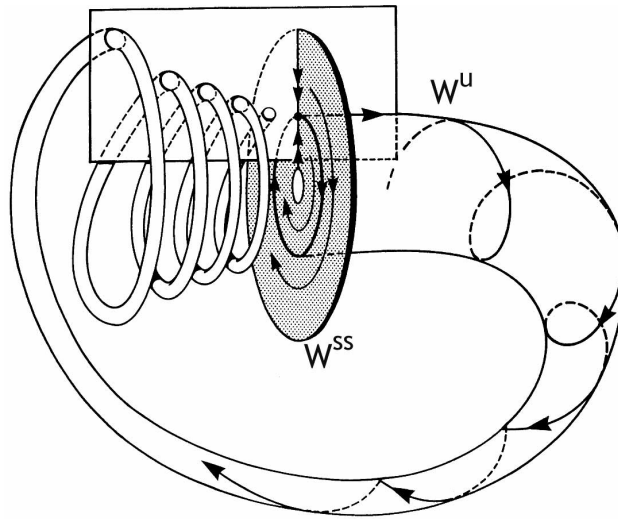


图 1: 蓝天分岔作用: 不稳定流形 W^u 回到鞍-结点周期轨道, 同时在由强稳定流形 W^{ss} 与鞍-结点分开的稳定节点区域中进行无限多次旋转。强烈的横向收敛将同宿连接转变为稳定的周期性轨道, 在鞍-结点轨道的“幻影”附近减速。

1 余维一分岔

周期轨道的稳定性丧失或消失对应于确定的分岔: 主要稳定边界对应于余维 1 的分岔 (即在一般位置的单参数族中发生的分岔)。对于平面上的系统, 有四个这样的稳定性边界, 都是由 Leontovich

和 Andronov 发现和描述的。这些也是存在边界，即周期轨道在分岔时刻或之后立即消失。即，周期轨道要么

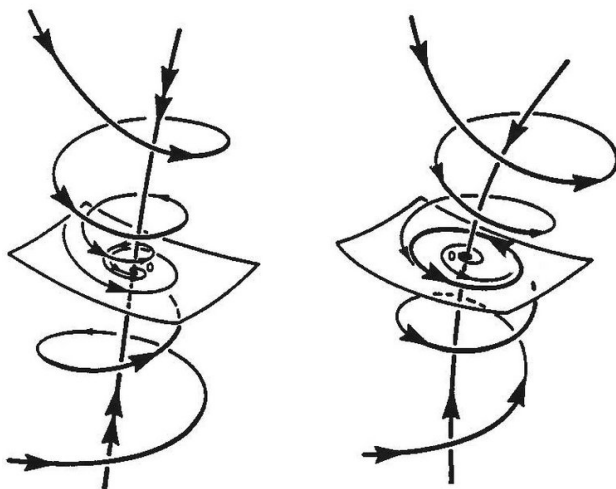


图 2: 在 R^3 的超临界 Andronov-Hopf 分岔。一个稳定的周期轨道从平衡状态出现，使其成为具有二维不稳定和一维稳定流形的鞍-焦点。新轨道的周期由分岔平衡状态的特征指数的虚部的大小决定。

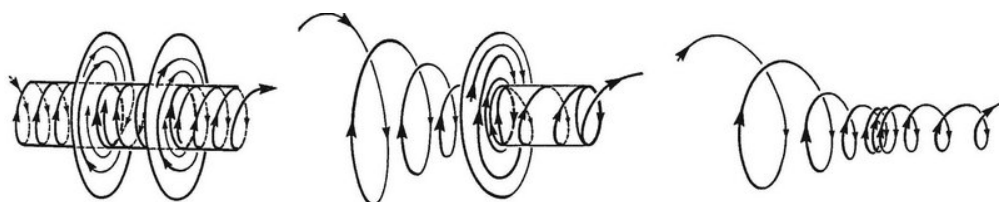


图 3: 在 R^3 的局部鞍-结点分岔: 稳定的周期轨道与鞍轨道在 $\mu = \mu_0$ 合并，在 $\mu > \mu_0$ 两者都消失了。相点通过鞍-节点虚构的飞行时间估计为 $1/\sqrt{\mu - \mu_0}$ 。

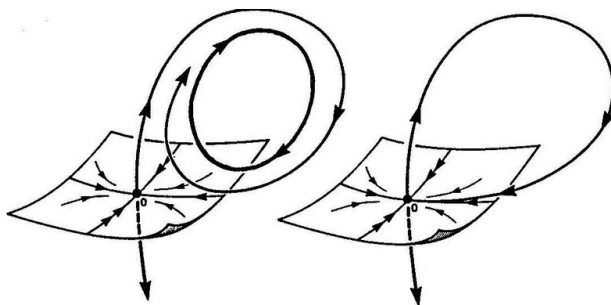


图 4: 在 R^3 的稳定周期轨道在鞍平衡状态的同宿环处消失。鞍点的值或数量在这里为负数。分岔轨道的周期在接近鞍点时以对数速度增加。

- 1. 通过超临界 Andronov-Hopf bifurcation 分岔坍缩成平衡状态; 或
- 2. 与不稳定的周期轨道相撞 (获得等于 +1 的乘数) 并消失; 或
- 3. 成为鞍平衡状态的同宿环; 或
- 4. 转化为鞍-结点平衡状态的同宿环。

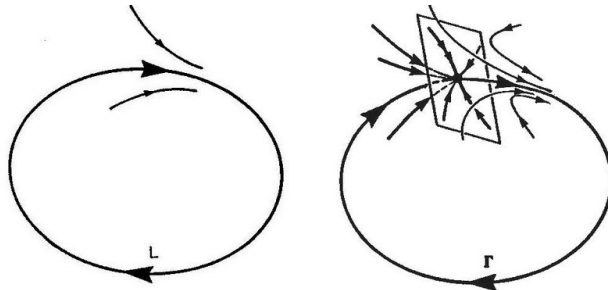


图 5: 稳定的周期轨道成为鞍-结点平衡状态的同宿环。在今天的语言中, 这种分岔也被称为 *SNICSaddle - Node on a Invariant Curve*。轨道周期的增长遵循一般的鞍-结点定律。

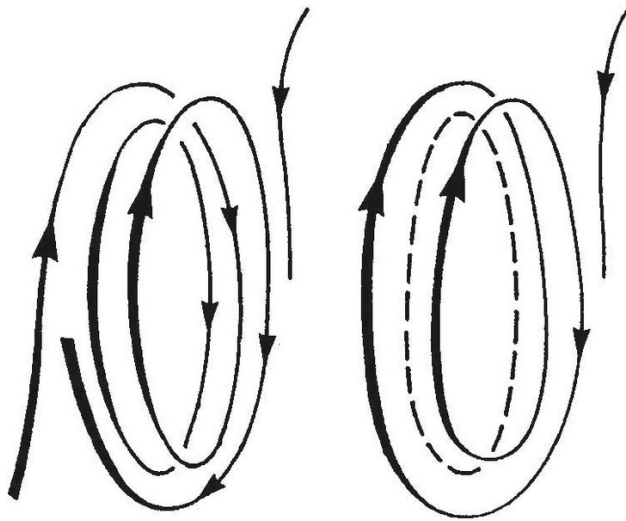


图 6: 周期倍增分岔: 稳定的周期轨道失去稳定性, 成为具有 $2D$ 稳定和不稳定流形的鞍型, 同胚于莫比乌斯带。稳定性由双倍周期的周期轨道继承。两个轨道都链接在 R^3 。

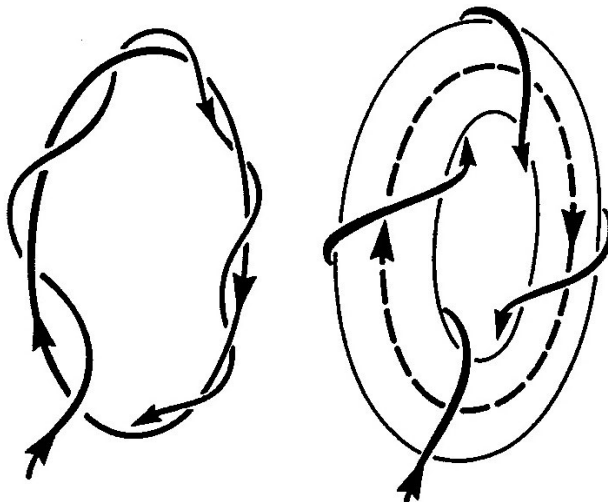


图 7: 非共振环面分岔: 稳定的螺旋周期轨道被稳定的二维环面包围。

高维系统增加了两种可能性，其中周期轨道不再在分岔处消失，而只会通过以下方式失去稳定性：

- 5. **周期加倍**或翻转分岔，其中轨道的乘数通过 -1 减小；原始轨道的稳定性由周期加倍的轨道继承；或
- 6. 一对复共轭乘数的次级 Andronov-Hopf 分岔 $e^{\pm i\phi}$ ，这里 $\phi \neq 0, \pi/2, 2\pi/3, \pi$ 周期轨道，向外穿过一个单位圆，正如 Andronov 所说，周期轨道“失去皮肤”，成为二维不变圆环。

还可以通过轨道的周期和长度如何取决于控制参数 μ 来对这些 $cod - 1$ 分岔进行分类，接近有限分岔值 μ_0^+ 。

- 第 I 组：**有限周期 & 零长度**：第一组由单个 **Andronov-Hopf 分岔** 组成，在该分岔处，周期轨道与一对纯虚特征指数 $\pm i\omega$ 坍缩成平衡状态，给出其周期的估计 $T \approx 2\pi/\omega$ 。
- 第 II 组：**有限周期 & 长度**：第二组包括局部 **鞍-结**，**翻转或周期倍增** 分岔，以及次级 Andronov-Hopf 分岔 (上列表中的数字 2, 5 和 6)。值得注意的是，周期轨道持续在 $\mu = \mu_0^+$ 为第 II 组的边界。
- 第 III 组： **∞ 周期 & 有限长度**：是平衡同宿分岔的特征 (上述情况 3 和 4)。此外，轨道周期随着 $1/\sqrt{\mu\mu_0}$ 在成为鞍-结点平衡状态的同宿轨道 (一个零指数) 之前，或者作为 $\ln(\mu\mu_0)$ 如果是简单的鞍点。
- 第 IV 组： **∞ 周期 & ∞ 长度**：蓝天灾难。

2 历史笔记

Palis 和 Pugh[1974] 提出了关于周期性轨道在接近其存在边界时保持在**相空间**的有界区域内而轨道的周期和长度无界增加的问题。这个问题被编码为“蓝天灾难”[Abraham, 1985]，因为轨道虽然越来越长，但在空间中几乎是消失的。这种单参数的周期性轨道家族的第一个例子是由 Medvedev[1980] 提出的。然而，Medvedev 族并不处于一般位置。正如 [Afraimovich and L. Shilnikov, 1982; Turaev and L. Shilnikov, 1986; Li and Zhang, 1991] 中的分析所示，其中一个 Medvedev 例子的通用版本 (在克莱因瓶上) 为周期性轨道给出了一个新的存在边界，在前向和后向翻转分叉序列中接近这个边界的稳定性无限次。关于周期性轨道在蓝天上消失而不在途中失去稳定性的可能性的问题一直没有解决，直到 L. Shilnikov 和 Turaev[1995; 2000] 在 R^3 及以上发现了以下配置：它的核心是稳定 (节点) 区域的二维不稳定流形从稳定 (节点) 区域返回轨道的方式，如上图 1 所示，它在那里进行了无限多次旋转。这个配置的第二个组成部分是沿同宿连接的强横向收缩：这确保了它的闭合成为一个任意长的 (周期和长度都评估为 $1/\sqrt{\mu\mu_0}$) 稳定的周期性轨道，在矩阵节点轨道消失之后。

在其他情况下，鞍-结点周期性轨道的不稳定流形的闭合可以是一个二维环--对应于同步区的边界 (Arnold 舌)，或一个克莱因瓶 (如 Medvedev 的例子)，或者不稳定流形可能横向穿越马氏节点轨道的强稳定流形 W^{ss} ，这导致混沌的转移动力学 [Lukyanov and L. Shilnikov, 1978; A. Shilnikov et al., 2005] (参见 Lukyanov-Shilnikov 分岔)。值得注意的是，鞍-结点分岔在 R^4 甚至可以导致在满足 W^u 几个简单条件的情况下出现双曲奇异**吸引子** (Smale-Williams 电磁阀) 如它返回到节点区域 [L. Shilnikov

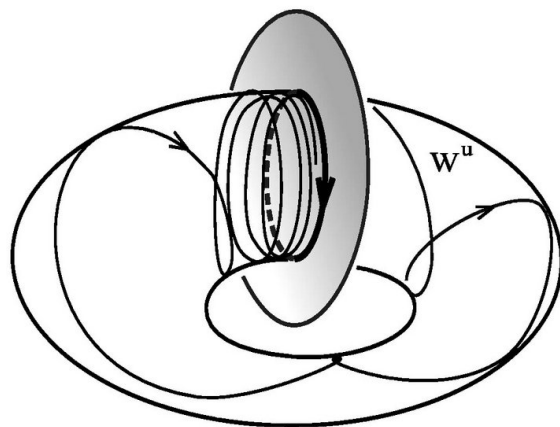


图 8: 环面是鞍-结点周期轨道不稳定流形 W^u 的闭合。这种分岔发生在共振带的边界上。

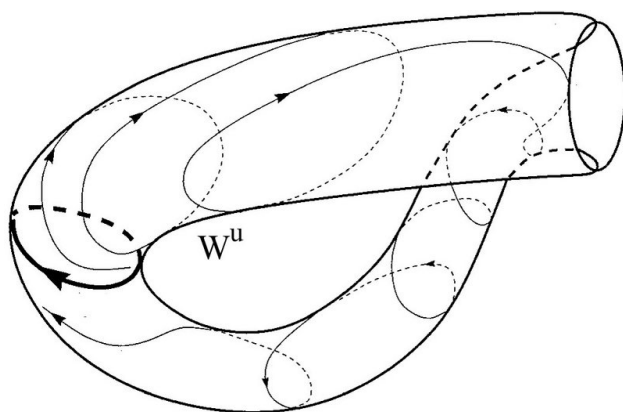


图 9: 克莱因瓶上的鞍-结点周期轨道，这是其不稳定流形的闭合。

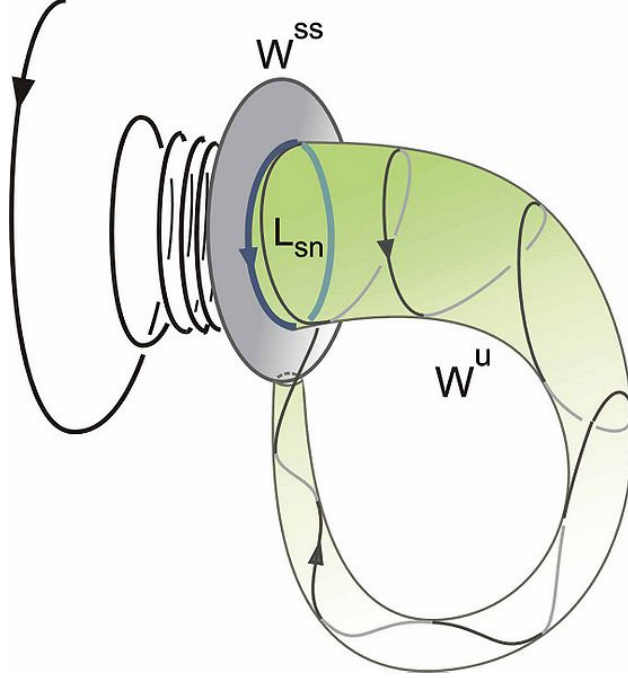


图 10: 不稳定流形 W^u 的鞍-结点轨道沿非中心 (强稳定) 流形 W^{ss} 返回。这种非中心同宿分岔导致混沌双曲线子集的出现 [Lukyanov and L. Shilnikov, 1978], 因为分岔轨道消失了。

and Turaev, 2000]。

3 应用

N. Gavrilov 和 A. Shilnikov [Gavrilov and Shilnikov, 2000; L. Shilnikov et al., 2001] 给出了经历灾难的具体方程的第一个例子:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2 + \mu - 10(x^2 + y^2)) + z^2 + y^2 + 2y, \\ \dot{y} &= -z^3 - (1 + y(z^2 + y^2 + 2y)) - 4x + \mu y, \\ \dot{z} &= (1 + y)z^2 + x^2 - \varepsilon,\end{aligned}\tag{1}$$

这个系统中蓝天灾难的早期发展始于与具有特征指数的平衡状态的同宿连接 $(0, \pm i\omega)$; 这确实是一个名为 $cod - 2$ 的分岔, 在 **Gavrilov-Guckenheimer** 或又名同宿 Fold-Hopf 之后。

蓝天灾难已被证明是慢-快系统的一个典型现象 [L. Shilnikov et al., 2001; A. Shilnikov et al., 2005]。众所周知, 这种系统的动力学以慢速运动流形的吸引域为中心, 这些吸引域是由其快速子系统的极限集形成的, 如平衡 (标记为 M_{eq}) 和周期性轨道 (M_{po}) (见相应的草图)。蓝天灾难发生在这里, 当流形 M_{po} 上出现了一个沿流形 M_{po} 关闭系统的解的通道时。蓝天轨道的稳定性是由于跨越流形 M_{eq} 的收敛, 该流形由快速子系统的稳定平衡状态组成。

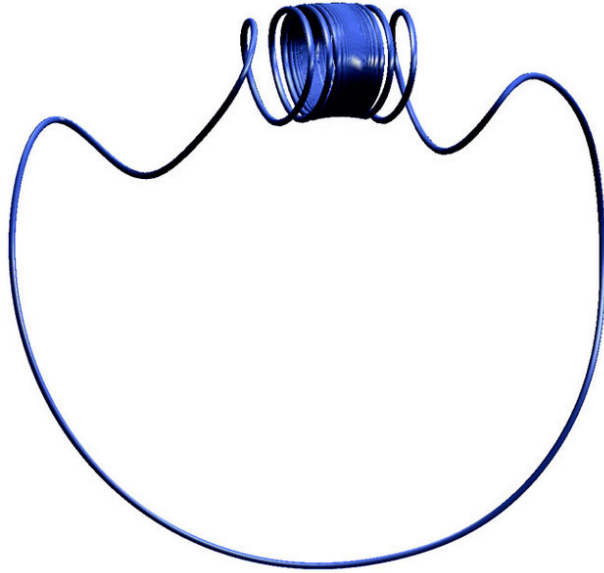


图 11: Gavrilov-A 中的蓝天轨道。Shilnikov 模型 $\mu = 0.456$ 和 $\varepsilon = 0.0357$ 。

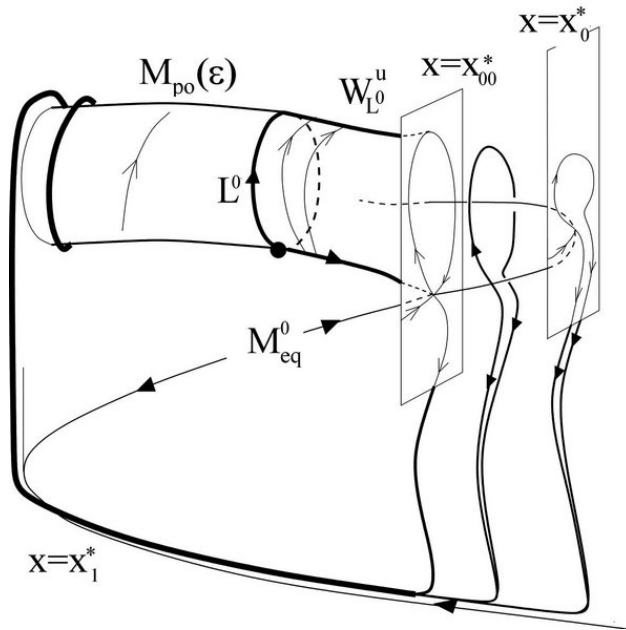


图 12: 慢动作流形 M_{pp} 上的鞍-结点周期轨道分岔由快速子系统的极限环组成。该流形通过上面讨论的同宿分岔终止。

在计算神经科学的慢-快 Hodgkin-Huxley 模型中, 蓝天灾难描述了周期性簇发放和强直尖峰活动之间的连续和可逆过渡, 例如, 在一个减少振荡的心脏中间神经元模型中 [A.Shilnikov 和 Cymbalyuk, 2005]:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2[30m_{K2}^2(V + 0.07) + 8(V + 0.046) + 200f_{\infty}^3(150, 0.0305, V)h_{Na}(V - 0.045) + 0.0060], \\ \dot{h}_{Na} &= [f_{\infty}(500, 0.0325, V)h_{Na}]/0.0406, \\ \dot{m}_{K2} &= [f_{\infty}(83, V_{\frac{1}{2}} + V_{K2}^{shift}, V)m_{K2}]/0.9\end{aligned}\quad (2)$$

其中 V 是膜电位, h_{Na} 是失活的快速钠电流, 以及 m_{K2} 是激活持久性钾电流; 玻尔兹曼函数 $f_{\infty}(a, b, V) = 1/(1 + e^{a(b+V)})$ 描述电流 (内) 活化的动力学。分岔参数 V_{K2}^{shift} 是偏离规范值 $\frac{1}{2} = 0.018V$ 对应于 $f_{\infty} = 1/2$, 即对半激活钾通道。蓝天灾难发生在模型近 $V_{K2}^{shift} = 0.02425$ (图14)。

图 13: 在尖峰流形 M_{lc} 和平衡流形 M_{eq} 的超极化分支之间反复切换的长簇发放轨道, 在中间神经元模型的相空间中。

值得注意的是, 由于蓝天灾难是局部基于鞍-结点分岔, 周期簇发放轨道遵守 $1/\sqrt{\mu\mu_0}$ 。这意味着相点的慢速分量变慢在消失的鞍-结点的幻影附近, 从而允许簇发放轨道, 任意一一吸收多个新尖峰 (图16) 当分岔参数接近转换值。

参考文献

- A.A. Andronov, E.A. Leontovich, Some cases of dependence of limit cycles on a parameter, Uchenye zapiski Gorkovskogo Universiteta (Research notes of Gorky University) 6, 3-24, 1937.
- A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.E. Gordon, A.G. Maier. The theory of bifurcations of dynamical

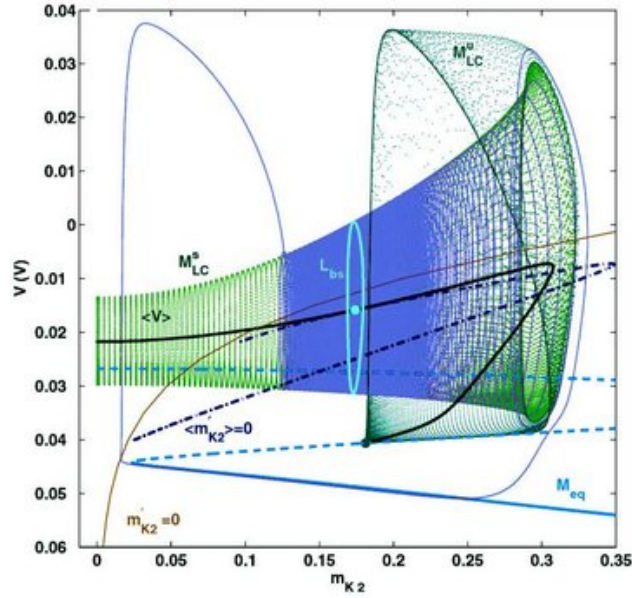


图 14: 浅蓝色显示的是鞍-结点周期轨道，它使簇发放的尖峰阶段无限大。在心脏中间神经元模型中，使用提出的平均零斜线在尖峰波形上寻找周期性轨道：它们的相切产生鞍-结点轨道。在鞍-结点轨道解耦后，该模型表现出周期性的强直尖峰活动。

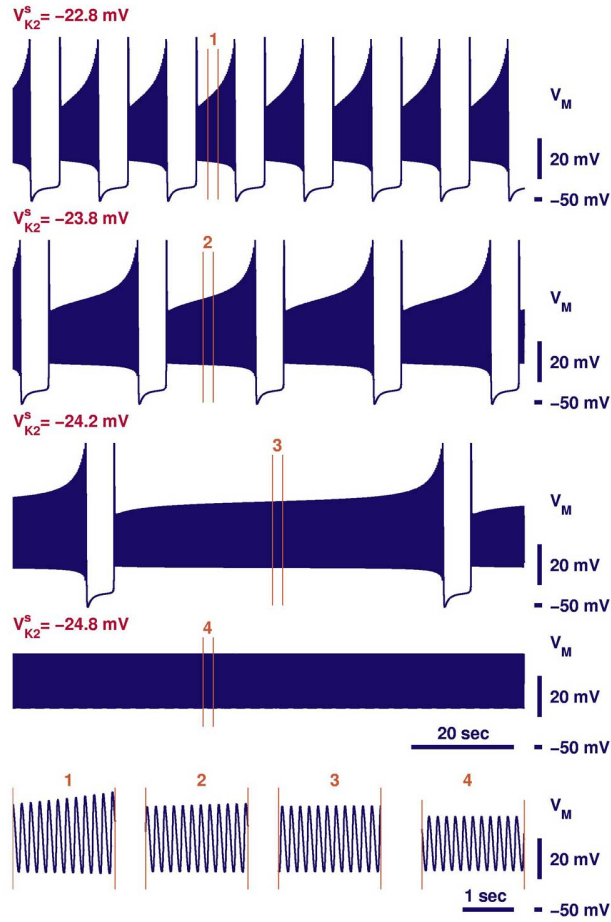


图 15: 心脏中间神经元模型 (2) 生成的波形，用于降低分岔参数 V_{K2}^{shift} 的值。簇发放状态 (三个顶部迹线) 不断转化为强直性尖峰 (底部迹线)。

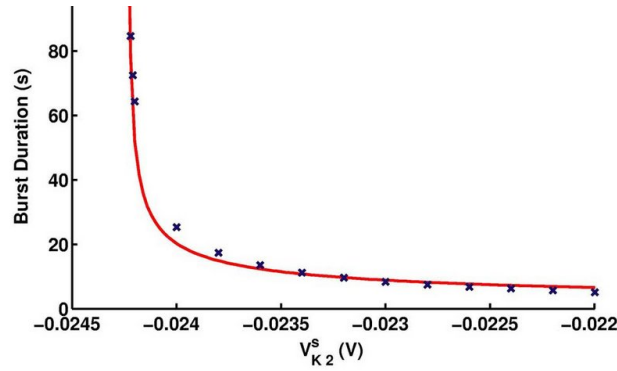


图 16: 簇发放周期增加为 $0.31/\sqrt{|V_{K2}^{shift} + 24.25|}$, 其中 0.02425V 是转移值。

systems on a plane, Wiley, New York, 1971.

- J. Palis, C. Pugh, in Fifty problems in dynamical systems, Dynamical systems - Warwick, 1974, Springer Lecture Notes 468, 1975.
- R.H. Abraham, Catastrophes, intermittency, and noise, in Chaos, Fractals, and Dynamics, Lect. Notes Pure Appl. Math. 98, 3-22, 1985.
- V.S. Medvedev, The bifurcation of the “blue sky catastrophe” on two-dimensional manifolds, Mathematical Notes, 51(1), 76-81, 1992.
- W. Li, C. Li and Z.F. Zhang, Unfolding critical homoclinic orbit of a class of degenerate equilibrium points, Symp. Special Year of ODE and Dyn. Systems in Nankai Univ. in 1990. World Sci. Publ, 99-110, 1992.
- D.V. Turaev, L.P. Shilnikov, Blue sky catastrophes. Dokl. Math. 51, 404-407, 1995.
- L. Shilnikov, D. Turaev, A new simple bifurcation of a periodic orbit of blue sky catastrophe type, in “Methods of qualitative theory of differential equations and related topics, AMS Transl. Series II, v.200, 165-188, 2000.
- N. Gavrilov, A. Shilnikov, Example of a blue sky catastrophe, ibid, 99-105, 2000.
- L. Shilnikov, A. Shilnikov, D. Turaev, L. Chua, Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I. World Scientific, Singapore, 1998.
- L. Shilnikov, A. Shilnikov, D. Turaev, L. Chua, Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Parts II, World Scientific, Singapore, 2001.
- A. Shilnikov, L.P. Shilnikov, D. Turaev. Blue sky catastrophe in singularly perturbed systems. Moscow Math. Journal 5(1), 205-218, 2005.
- V. Lukyanov, L.P. Shilnikov, On some bifurcations of dynamical systems with homoclinic structures. Soviet Math. Dokl. 19(6), 1314-1318, 1978.
- A. Shilnikov, G. Cymbalyuk, Transition between tonic-spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe, Phys Review Letters, 94, 048101, 2005.

内部参考文献

- Yuri A. Kuznetsov (2006) [Andronov-Hopf bifurcation](#). Scholarpedia, 1(10):1858.
- John Guckenheimer (2007) [Bifurcation](#). Scholarpedia, 2(6):1517.
- Eugene M. Izhikevich (2006) [Bursting](#). Scholarpedia, 1(3):1300.
- James Meiss (2007) [Dynamical systems](#). Scholarpedia, 2(2):1629.
- Eugene M. Izhikevich (2007) [Equilibrium](#). Scholarpedia, 2(10):2014.
- Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) [Periodic orbit](#). Scholarpedia, 1(7):1358.
- Yuri A. Kuznetsov (2006) [Saddle-node bifurcation](#). Scholarpedia, 1(10):1859.
- Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) [Stability](#). Scholarpedia, 1(10):1838.
- Arkady Pikovsky and Michael Rosenblum (2007) [Synchronization](#). Scholarpedia, 2(12):1459.
- Paul So (2007) [Unstable periodic orbits](#). Scholarpedia, 2(2):1353.

其他链接

- [A. Shilnikov 网站](#)
- [Blue Sky Catastrophe in action](#)

也可参考

[Bifurcation](#), [Periodic Orbit](#), [saddle-node](#), [Shilnikov saddle-node](#), [homoclinic](#), [homoclinic bifurcation](#), [Andronov-Hopf](#), [Shilnikov-Hopf](#), [Gavrilov-Guckenheimer](#), [saddle-node-Hopf](#), [Fold-Hopf](#)