# Shilnikov 鞍-结分岔

Leonid Pavlovich Shilnikov[1], Andrey Shilnikov[2]
1. 应用数学和控制论研究所，俄罗斯下诺夫哥罗德,
2. 数学系，GSU，亚特兰大，GA

Leonid Pavlovich Shilnikov and Andrey Shilnikov (2008), Scholarpedia, 3(4):4789.
doi:10.4249/scholarpedia.4789
(Redirected from Saddle-node homoclinic bifurcation)
revision #91765 [link to/cite this article]

在两个由 $m(\geq 2)$ 个异宿轨道全局连接的鞍点合并后，鞍-鞍或 Shilnikov 鞍-结点分岔在一个系统中产生了复杂的动力学。如图1所示，后面的结点成为分岔处的横向同宿连接。通过这个一维分岔后，系统动力学就变成了在相同的 $m$ 个符号上的 Bernoulli 方案上的悬浮物。

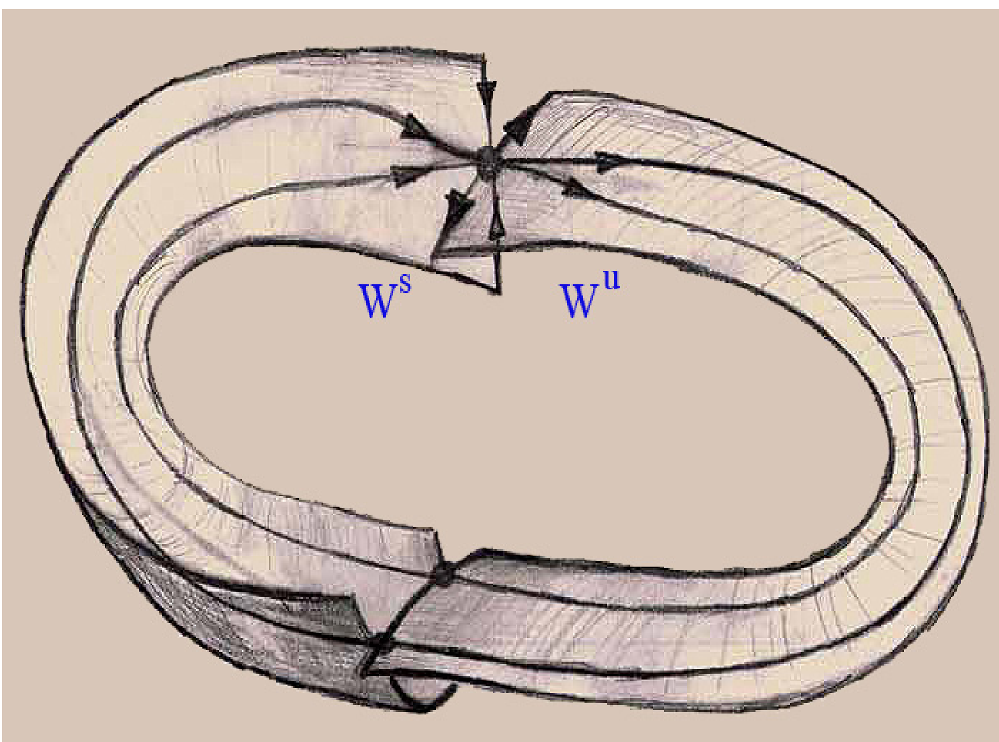


**图 1:** 定理 3 的插图：鞍由 $R^3$ 中两个拓扑类型 (2,1) 和 (1,2) 的鞍点组成。它的稳定流形 $W^s$ 和不稳定流形 $W^u$ 沿两个同宿轨道横向交叉。一旦平衡消失，就会出现一个新诞生的双曲集，其动力学与两个符号上的 Bernoulli 方案上的悬浮物相联系。

# 1 单个零指数

让我们考虑一个 $n$ 维的、足够平滑的系统，它在原点有一个结构不稳定的平衡状态 $O$，其特征值为 $Re\lambda_i \neq 0 (i = 1, \cdots, n1), Re\lambda_n = 0$。在原点附近，系统可以写成 [L.Shilnikov et al., 1998 and 2001]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= Ay + g(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $f, g$ 与它们的第一个参数一起在原点消失。假设在泰勒展开

$$f(x, \varphi(x)) = l_2 x^2 + l_3 x^3 \cdots,$$

第一个李亚普诺夫系数 $l_2 \neq 0$；这里 $y = \varphi(x)$ 是方程 $Ay + g(x, y) = 0$ 的解；这里 $A$ 是一个 $(n1) \times (n1)$ 矩阵。

系统 (1) 的解在原点附近的行为类似于以下截断标准型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu + x^2, \\ \dot{y} &= Ay, \end{aligned} \tag{2}$$

根据矩阵 $A$ 的范围，有可能出现以下情况：

- 1) $Re\lambda_i < 0, i = 1, \cdots, n1$ 的情况，如图2所示。
  这里，$(n1)$ 维非主要或强稳定流形 $W^{ss}$ 将平衡状态的一个邻域分解为两个区域：稳定 (或结点) 和鞍点。鞍点包含从 $O$ 出发的轨迹 $\Gamma^u$，或者随着 $t \to -\infty$ 的出现而趋近 $O$，而在稳定结点区域，轨迹趋近于原点，在前进时间内

  $$t \to +\infty$$

  在矢量场的小而平滑的扰动下，$O$ 要么消失，要么解耦为两个平衡状态：一个稳定结点和一个鞍点。这就是局部 A 鞍-结点分岔。
- 2) $Re\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n1$ 的情况通过时间变化 $t \to t$，还原为前一种情况，这使得不稳定的结点稳定，同时保留了其他平衡状态的鞍点结构。
- 3) $Re\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, k$，和 $Re\lambda_j > 0, j = k + 1, \cdots, n1$ 的情况。相应的平衡状态被称为鞍-鞍，因为它是两个适当拓扑类型的鞍合并的结果，见图1和图5。它有一个 $(k + 1)$ 维的稳定流形 $W^s$，可以衍射为半空间 $\hat{R}^k|(x, y_1, \cdots, y_k), x < 0$，以及一个不稳定的 $W^u$ 可以衍射为半空间 $\hat{R}^{nk}|(x, y_1, \cdots, y_{nk1}), x > 0$ 衍射。

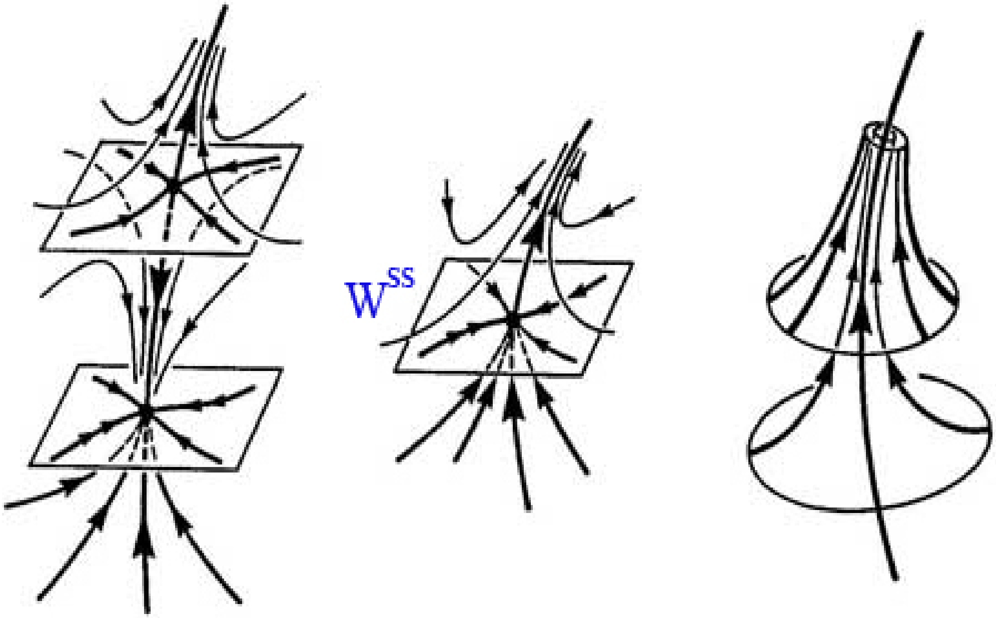


**图 2:** $R^3$ 中的局部鞍-结分岔：一个稳定的结点与一个拓扑类型为 (2,1) 的鞍点合并

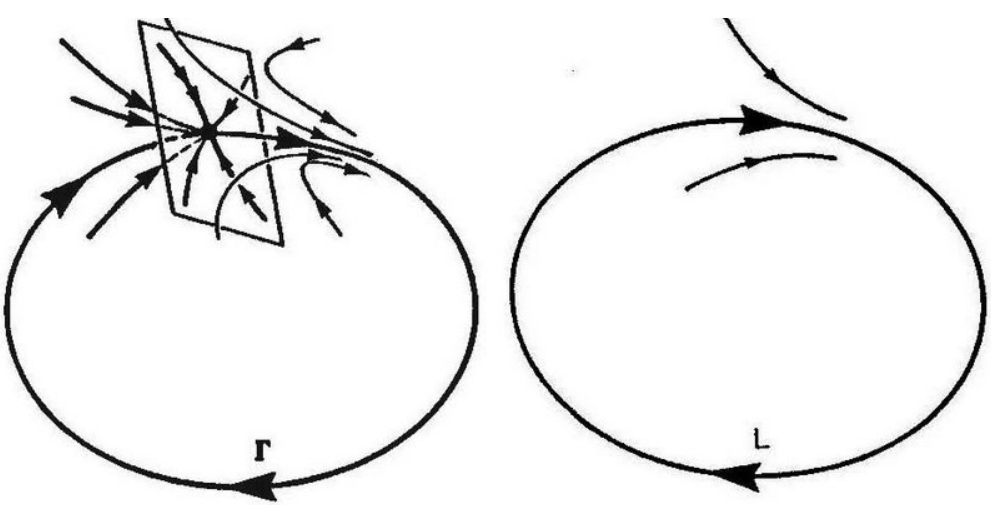


**图 3:** 同宿鞍-结分岔产生了一个稳定的周期性轨道。

## 2 用于同步的鞍-结分岔

早在上世纪 30 年代初，A.Andronov 和 A.Vitt 研究了 1:1 的共振现象在周期性强迫范德波尔方程:

$$\ddot{x}\mu(1x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = Asin\omega t,$$

其中 $\ll 1$ 和 $|\omega_0\omega|$ $\mu$。他们发现，稳定平衡状态的消失伴随着系统中稳定极限环的出现：或者换句话说，他们发现了同步 (相位锁定) 和调制 (跳动振荡) 之间的过渡机制。后来，A. Andronov 和 E. Leontovich 利用全局分岔的工具对这一现象进行了严格的数学解释。

**定理 1**

让一个二维系统有一个平衡状态 $O$，其特征指数为 $\lambda_1 < 0$ 和 $\lambda_2 = 0$，这样它的不稳定分离矩阵 $\Gamma^u$ 就会随着 $t \to +\infty$ 而回到 $O$ 而不是在 $W^{ss}$。然后，随着鞍点的消失，一个单一的、稳定的周期性轨道从其同宿环 $\bar{\Gamma}$ 中出现。

L. Shilnikov[1963] 对高维情况下的这种分岔进行了概括。它的阶段在图3中被勾勒出来。

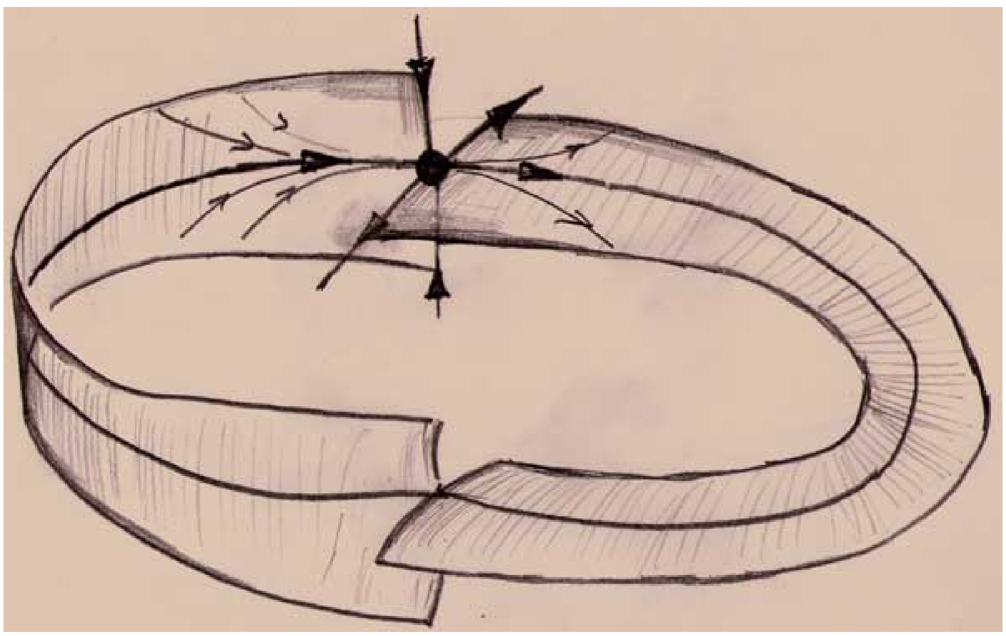

**图 4:** 在其稳定流形和不稳定流形的交汇处，一个单一的横向同宿连接成为一个鞍点周期轨道。

## 3 鞍-鞍

除了鞍-结点，L. Shilnikov 在 [1969] 中提出并研究了鞍-鞍的另一个奇特的同宿分岔。

**定理 2**

让 $\Gamma \in W^s \bigcap W^u$ 且不在 $\partial W_s \bigcap \partial W^u$ 中，即 $W^u$ 和 $W^s$ 沿 $\Gamma$ 横向交叉。然后，在鞍-鞍消失后，$\bar{\Gamma}$

成为一个单一的鞍周期轨道 (图4)。

这个定理的证明需要创造一种解决边界值问题的特殊技术，今天被称为希尔尼科夫坐标，这对证明由鞍轨道产生的复杂双曲动力学的存在特别有帮助。

**定理 3**

让一个鞍-鞍的 $W^u$ 和 $W^s$ 在某个邻域 $U$ 内沿 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$ 横向交叉 (见图1)。然后，在鞍-鞍消失后，与 $m$ 个符号的子移位上的悬浮物共构的双曲集在 $U$ 中诞生。

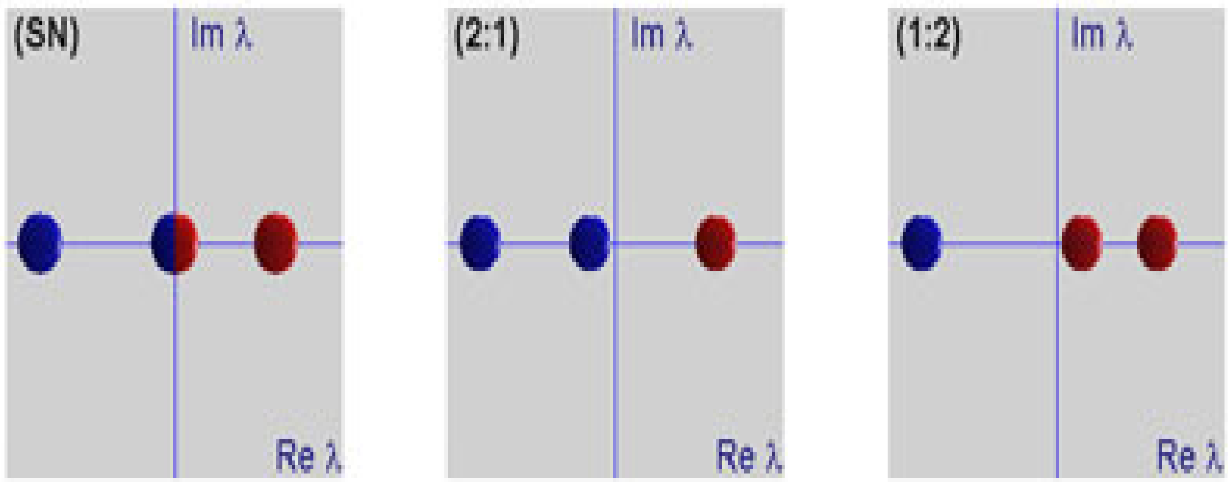


**图 5:** 所涉及的平衡状态的主要特征值。

一般来说，在二维一的情况下，鞍-鞍的 $W^u$ 和 $W^s$ 可以在这种同宿轨道的可数集合上横向相交；也就是说，这个集合的闭合包括可数的鞍周期轨道。如果是这样的话，鞍-鞍的消失就产生了一个一维双曲集的出现，以描述哪一个需要采用有限状态数的拓扑tMarkov 链。[Afraimovich and Shilnikov, 1983] 。

## 4 应用和实例

由 Shilnikov 鞍-鞍分岔集得到的复集一般不是吸引子。这也许就是为什么仍然需要这个简单的余维 1 分岔的现实应用程序的原因。Glendenning 和 Sparrow [1996] 提出了一个例子: 他们的基本思想是通过鞍-鞍分岔去除类-Lorenz 模型中初始的鞍点，正好在分岔平衡态有一个同宿环同时形成的同宿蝴蝶时，如图6所示。如果系统的轨道没有沿着 $z$ 轴偏离它，这将使系统的奇异吸引子成为真正的双曲型 [Afraimovich et al. [1977,1983]]。从这些参考文献也可以看出，由于初始鞍点稳定流形的前像在吸引子中处处稠密，即使平衡态消失后，相点仍将不可避免地再次任意靠近 $z$ 轴。它在 $z$ 中被拖拽下来，然后被重新注入回去 (图7)，这样当它从上面向下降到奇异的吸引子时，它会绕着 $z$ 轴旋转。这导致了二维庞加莱映射中独特的钩子 [Shilnikov，[1993]] 的形成，从而表明 Lorenz 吸引子中稳定和不稳定叶片交叉中横向性的必要性质不再持久。

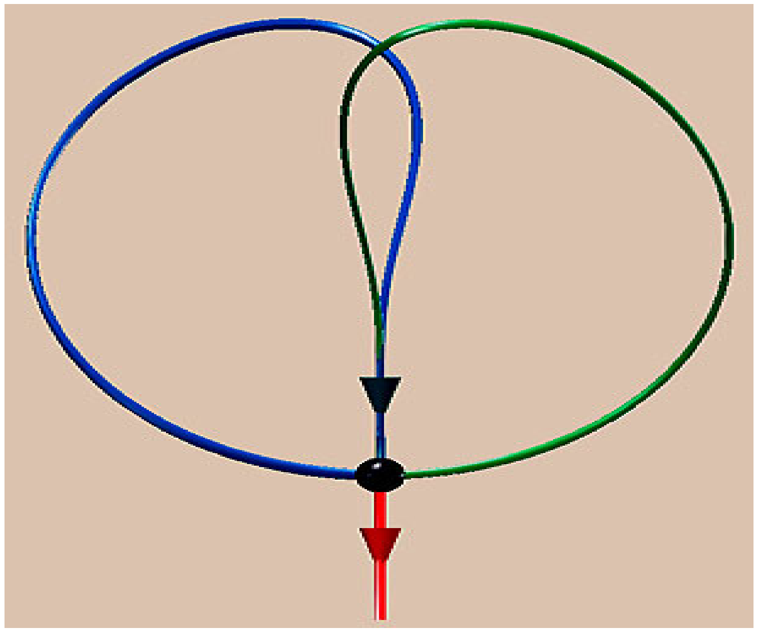

**图 6:** 在修正的 Morioka-Simizu 模型 [Shilnikov, [1993]] 中，有一对同宿轨道的鞍-鞍点。

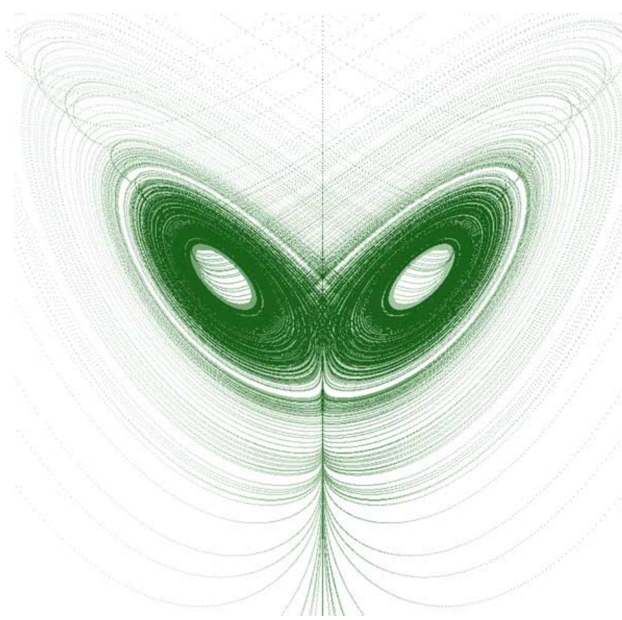

**图 7:** 在修正的 Morioka-Simizu 模型中，一个类-Lorenz 的瞬态混沌，其中的鞍-鞍已经消除了初始的平衡状态。

## 参考文献


- Afraimovich V.S. and Shilnikov L.P. [1983], Strange attractors and quasiattractors in Nonlinear Dynamics and Turbulence eds. by G.I. Barenblatt, G. Iooss and D.D. Joseph, Pitman, NY, 1-28.
- Afraimovich V.S., Bykov V.V. and Shilnikov L.P. [1977] On the appearance and structure of Lorenz attractor, DAN SSSR, 234, 336-339.
- Afraimovich V.S., Bykov V.V. and Shilnikov L.P. [1983] On the structurally unstable attracting limit sets of Lorenz attractor type. Tran. Moscow Math. Soc., 2, 153-215.
- Andronov A. A. and Vitt A. A. [1930] Zur Theorie des Mitmehmens von van der Pol. Archiv fur Elektrotechnik, Bd. XXIV, 99.
- Andronov A. A. and Leontovich E. A. [1937] Some cases of the dependence of the limit cycles upon parameters. Uchenye zapiski Gorkovskogo Universiteta 6, 3-24.
- Champneys A.R., Härterich J. and Sandstede B. A non-transverse homoclinic orbit to a saddle-node equilibrium. Ergodic Theory Dynam. Systems 16 (1996), no. 3, 431-450.
- Glendinning P. and Sparrow C. [1996] Shilnikov's saddle-node bifurcation. Int. J. Bifurcations & Chaos 6, 1153.
- Shilnikov L. P. [1963] Some cases of generation of periodic motion from singular trajectories. Math. USSR Sbornik 61(103), 443-466.
- Shilnikov L.P. [1969] On a new bifurcation of multidimensional dynamical systems. Sov. Math. Dokl. 10, 1389-1371.
- Shilnikov L.P., Shilnikov A., Turaev D. and Chua L. [1998] Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. World Scientific.
- Shilnikov L.P. Shilnikov A. Turaev D. and Chua L. [2001] Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II.World Scientific.
- Shilnikov A.L. [1993] On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model. Physica D 62 (1-4), 338-346.


### 内部参考文献


- Leonid Pavlovich Shilnikov and Andrey Shilnikov (2007) Shilnikov bifurcation. Scholarpedia,2(8):1891.
- Steve Smale and Michael Shub (2007) Smale horseshoe.. Scholarpedia, 2(11):3012.
- Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.
- John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517.
- Eugene M. Izhikevich (2006) Bursting. Scholarpedia, 1(3):1300.
- James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.
- Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014.

- Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.
- Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.
- Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.
- Arkady Pikovsky and Michael Rosenblum (2007) Synchronization. Scholarpedia, 2(12):1459.
- Paul So (2007) Unstable periodic orbits. Scholarpedia, 2(2):1353.


## 也可参考

Bifurcation,Chaos, Shilnikov bifurcation,, Homoclinic Bifurcations, Homoclinic Orbits, Lorenz attractor, Smale Horseshoe Saddle-focus, Saddle-node, Chaos