

中心流形

杰克·卡尔 (赫瑞瓦特大学数学系和麦克斯韦数学科学研究所)

简化动力系统的主要方法之一是对系统进行降维。中心流形理论是一种严格的数学技术，至少在接近平衡时，使这种还原成为可能。

一个例子

我们首先来看一个简单的例子。考虑

$$x' = ax^3, \quad y' = -y + y^2 \quad (1)$$

其中 a 为常数。由于方程是解耦的，因此我们看到，当且仅当 $a < 0$ 时，(1) 的定解 $x = y = 0$ 渐近稳定。现在假设

$$x' = ax^3 + xy - xy^2, \quad y' = -y + bx^2 + x^2y \quad (2)$$

由于方程是耦合的，因此我们无法立即确定(2)的定解 $x = y = 0$ 是否渐近稳定。关键是解耦方程的概念的抽象化。

在 $|x|$ 足够小的条件下，定义的曲线 $y = h(x)$ ，是系统的不变流形

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \quad (3)$$

如果 $x(0) = x_0$ 的(3)的解是 $y(0) = h(x_0)$ 在曲线 $y = h(x)$ 上，只要 $x(t)$ 保持较小。

对于系统(1)， $y = 0$ 是不变流形。注意，在确定(1)的定解的稳定性时，唯一重要的方程是 $x' = ax^3$ ，也就是说，我们只需要研究特定不变流形上的一阶方程。

中心流形理论告诉我们(2)对于小 x 具有不变流形 $y = h(x) = O(x^2)$ 。此外，可以通过研究标量方程来确定二维系统(2)解的局部行为。

$$u' = au^3 + uh(u) - uh^2(u) \quad (4)$$

该理论还告诉我们如何计算不变流形 $y = h(x)$ 的近似值。对于(2)，我们有 $h(x) = bx^2 + O(x^4)$ 并使用(4)中的信息得出

$$u' = (a + b)u^3 + O(u^5) \quad (5)$$

因此，如果 $a + b < 0$ ，则(2)的定解是渐近稳定的，如果 $a + b > 0$ 则是不稳定的。如果 $a + b = 0$ ，我们需要更好地近似于不变流形以决定稳定性。

中心流形

考虑系统

$$x' = Ax + f(x, y), \quad y' = By + g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (6)$$

其中矩阵 A 的所有特征值的实部为零，矩阵 B 的所有特征值的实部为负。函数 f 和 g 足够平滑，并且

$$f(0, 0) = 0, \quad Df(0, 0) = 0, \quad g(0, 0) = 0, \quad Dg(0, 0) = 0$$

其中 Df 是 f 的雅可比矩阵。

如果 f 和 g 等于零，则(6)具有两个明显的不变流形 $x = 0$ 和 $y = 0$ 。不变流形 $x = 0$ 称为稳定流形。在稳定流形上，所有解都以指数级快速衰减到零。不变流形 $y = 0$ 称为中心流形。通常，对于小 $|x|$ 定义的(6)，不变流形 $y = h(x)$ 在 $h(0) = 0$ 且 $Dh(0) = 0$ 的情况下也称为中心流形。用更物理的术语来说， y 的动力学遵循 x 的动力学，并且可以说 x 约束变量 y 。这种解释被称为强制同步原理。

主要结果

一般理论指出，对于(6)，存在中心流形 $y = h(x)$ ，并且中心流形上的方程

$$u' = Au + f(x, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^n \quad (7)$$

确定 $(x, y) = (0, 0)$ 附近(6)的动力学。特别地，如果(7)的固定解 $u = 0$ 是稳定的，我们可以将(6)的小解表示为 $t \rightarrow \infty$

$$x(t) = u(t) + O(e^{-\gamma t}), \quad y(t) = h(u(t)) + O(e^{-\gamma t})$$

其中 $\gamma > 0$ 为常数。

要使用上述理论，我们需要有足够的关于中心流形 $y = h(x)$ 的信息，以便确定(7)的局部动力学。如果我们将 $y(t) = h(x(t))$ 代入(6)中的第二个方程，我

们得到

$$N(h(x)) = h'(x)[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (8)$$

一般理论告诉我们, (8)的解 h 可以由 x 中的多项式近似, 即, 如果当 $x \rightarrow 0$ 时, $N(\phi(x)) = O(|x|^q)$, 则 $h(x) = \phi(x) + O(|x|^q)$ 。

还有一个与 y 轴相切的 m 维不变流形 W^s 被称为稳定流形。在稳定流形上, 所有解都以指数级快速衰减到零。图 1 说明了方程(6)的局部动力学。中心流形 $y = h(x)$ 上的流细节取决于方程式(7)中的高阶项, 并且在没有更多信息的情况下我们无法为流分配方向。

我们假设(6)中矩阵 B 的所有特征值均具有负实部。该理论可以扩展到矩阵 B 还具有一些具有正实部的特征值的情况。在这种情况下, 由于不稳定的特征值, (6) 的定解 $x = 0, y = 0$ 不稳定。对于(6), 有一个中心流形, 它捕获了有界小解的行为。特别是, 这提供了一种研究所有足够小的平衡, 周期轨道和异宿轨道的方法。

局部分岔

中心流形降维对于分岔理论的发展至关重要。我们通过一个简单的例子来说明这一点。考虑

$$x' = \epsilon x - x^3 + xy, \quad y' = -y + y^2 - x^2 \quad (9)$$

其中 ϵ 是一个小的标量参数。目的是研究(9)的小解。关于零平衡的线性化问题具有特征值-1 和 ϵ , 因此该理论不能直接应用。我们可以用等价形式写等式

$$x' = \epsilon x - x^3 + xy, \quad y' = -y + y^2 - x^2, \quad \epsilon' = 0. \quad (10)$$

当作为 R^3 的等式考虑时, (10)中的 ϵx 项是非线性的, 并且系统在

$(x, y, \epsilon) = (0, 0, 0)$ 处具有平衡。关于该平衡的线性化具有特征值-1, 0, 0, 即它具有两个零特征值和一个负特征值。现在应用该理论, 以便扩展系统(10)具有二维中心流形 $y = h(x, \epsilon)$, 该中心流形可以通过 x 和 ϵ 中的多项式近似。中心流形上的方程是二维的, 可以用标量变量 u 和 ϵ 表示为

$$u' = \epsilon u - 2u^3 + \text{高阶项}, \quad \epsilon' = 0$$

从(10)式可以推导出局部动力学。

笔记和进一步阅读

有限维中心流形的思想已经存在了很长时间，并且由 Carr(1981), Guckenheimer 和 Holmes(1983), Kelly(1967), Vanderbauwhede(1989)等人提出。有关中心流形近似的最新进展，请参见 Jolly 和 Rosa(2005)。Li 和 Wiggins(1997)的书的第 1-5 页给出了中心流形理论在无限维问题中的广泛应用列表。Mielke (1996)为椭圆偏微分方程开发了中心流形理论，并将该理论应用于弹性和流体力学问题。Haken(2004)研究了生物，化学和物理系统中相变的应用。

此外，有趣的是，Boxler(1989)引入了中心流形定理的随机扩展。在这种情况下，例如，中心流形和稳定流形可能会随机波动。

参考文献

- 1、J. Guckenheimer and P. Holmes (1983), Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag.
- 2、M. S. Jolly and R. Rosa (2005), Computation of non-smooth local centre manifolds, IMA Journal of Numerical Analysis , 25, no. 4, 698-725.
- 3、A. Kelly (1967), The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds. J. Diff. Eqns, 3, 546-570.
- 4、Li and S. Wiggins (1997), Invariant manifolds and fibrations for perturbed nonlinear Schrödinger equations. Springer-Verlag.
- 5、A. Mielke (1996), Dynamics of nonlinear waves in dissipative systems: reduction, bifurcation and stability. In Pitman Research Notes in Mathematics Series, 352. Longman.
- 6、A. Vanderbauwhede (1989). Center Manifolds, Normal Forms and Elementary Bifurcations, In Dynamics Reported, Vol. 2. Wiley.
- 7、H. Haken (2004), Synergetics: Introduction and Advanced topics, Springer Berlin

8、P. Boxler (1989), A stochastic version of center manifold theory, Probability Theory and Related Fields, 83(4), 509-545

内部参考文献

9、John W. Milnor (2006) Attractor. Scholarpedia, 1(11):1815.

10、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.

11、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

其他链接

- [Jack Carr's website](#)

也可看

[吸引子](#), [分岔](#), [正规双曲率](#), [稳定性](#), [协同作用](#)

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2006-12-17 10:16:46 GMT