标准型

詹姆斯 • 默多克 (爱荷华州立大学)

广义上讲，数学对象的标准型是通过应用被认为保留了对象基本特征的变换(通常是坐标的改变)而获得的对象的简化形式。例如，可以通过应用相似变换将矩阵转换为 Jordan 标准型。本文重点关注平衡点附近的微分方程(矢量场或流)的自治系统的标准型。类似的想法可以用于定点附近的离散时间动力系统(微分同胚映射)，或用于周期性轨道附近的流动。

基本定义

起点是一个微分方程组的平滑系统，其原点为平衡点(静止点)，并扩展为幂级数

$$\dot{x} = Ax + a_1(x) + a_2(x) + \cdots ,$$

其中 $x \in R^n$ 或 C^n，A 是 $n \times n$ 实数或复数矩阵，$a_j(x)$ 是次数 j + 1 的齐次多项式(例如 $a_1(x)$ 是二次项)。扩展被带到某个有限阶 k 并在那里被截断，或者被带到无穷大，但是被形式化地对待(该级数的收敛或发散被忽略)。目的是获得原始系统的(未知)解的近似值，该近似值将在扩展的时间范围内有效。假定线性项 Ax 已经处于所需的标准型，通常是 Jordan 形式或实标准型。应用对新变量 y 的转换，其形式为

$$x = y + u_1(y) + u_2(y) + \cdots ,$$

其中 u_j 是阶 j + 1 的齐次。这产生了一个新系统

$$\dot{y} = Ay + b_1(y) + b_2(y) + \cdots ,$$

具有与原始系统相同的一般形式。目的是仔细选择 u_j，以使 b_j 在某种意义上比 a_j “更简单”。“简单”可能仅意味着某些项已被消除，但在最佳情况下，人们希望实现一种系统，该系统具有原始系统中不存在的其他对称性。(如果标准型对所有阶均具有对称性，则原始系统具有隐藏的近似对称性，且误差极小。)

James Murdock (2006), Scholarpedia, 1(10):1902. doi:10.4249/scholarpedia.1902

在规范形式理论发展的许多历史参考文献中，有两个重要的参考文献是 Birkhoff (1996)和 Bruno (1989)。正如 Birkhoff 参考文献所示，该理论的早期阶段仅限于哈密顿系统，并且归一化变换是规范的(现在称为偶对的)。 Bruno 参考文献详细处理了归一化转换的收敛和发散。

一个例子

一个基本的例子是 n = 2 和

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

在这种情况下，有可能(无论初始 a_j 是什么)对于 j 的奇数实现 $b_j = 0$，并从每个 b_j 中除偶数 j 的两个系数都消除。更准确地说，写为 $r^2 = y^{21} + y^{22}$，在这种情况下的标准型是

$$\dot{y} = Ay + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i r^{2i} y + \beta_i r^{2i} Ay.$$

在极坐标中，这变为

$$\dot{r} = \alpha_1 r^3 + \alpha_2 r^5 + \cdots$$

$$\dot{\theta} = 1 + \beta_1 r^2 + \beta_2 r^4 + \cdots .$$

第一个非零值 α_i 决定了原点的稳定性，而 β_i 控制了频率对幅维的依赖性。同样，归一化系统在绕原点旋转的情况下也实现了对称(更确切地说，是等方差)。尽管经典的(或一级)标准型的方法不再以上述示例获得的形式终止，但重要的是要注意，方程中的系数 α_i 和 β_i 以及用于实现方程的变换项 u_j 都不是由初始 a_j 唯一确定。实际上，通过更仔细地选择 u_j，可以将非线性振荡器置于超自然形式(也称为唯一，更高级别或最简单的标准型)，其中几乎所有系数 α_i 和 β_i 为零。超标准型很难计算，从这里开始，我们仅谈论经典标准型。

标准型的渐近结果

对于某些系统，标准型(以给定的程维截断)足够简单，可以求解。在这种情

况下，有趣的是要问这个解是否对原始方程的解(例如，具有相同的初始条件)产生了很好的近似(在某种意义上是渐近近似)。答案是“有时是”。(“让步到”表示通常必须通过转换为标准型来反馈截断的标准型的解。)一些流行的书籍，例如 Nayfeh(1993)，完全是从这种观点来介绍主题的，而没有证明任何误差估计或注意到在某些情况下渐近有效性无法成立。 Murdock(2003)的第 5 章给出了这方面的一些定理和开放性问题。最基本的定理指出，如果(a)正确引入参数，(b)线性项的矩阵是半单的(见下文)，并且所有本征值都在虚数上，则关于小参数的渐近误差估计成立(c) 使用半单的标准型样式(请参见下文)。虽然标准型的渐近使用是重要的，当它有许多实际应用，标准型的首要重要性是作为一个预备步骤，以研究定性动力学，展开，和分岔。

标准型的几何结果

已经指出，标准型可以决定稳定性问题并建立隐藏的对称性。计算到 k 维的标准型也自动计算了(以 k 维为单位)稳定，不稳定和中心流形，中心流形的降维维及中心流形上的中心稳定流形和中心不稳定流形的纤维化。先计算中心流形简化，然后再仅针对此简化系统计算标准型的通用做法似乎可以节省工作，但会丢失许多这些结果。参见 Murdock(2003)的第 5 章。

有时，标准型的截断会产生一个简单的系统，该系统在拓扑上与平衡附近的原始系统相同，称为拓扑标准型。例如，在上面的示例中，在第一个不消失的 α_i 之后进行截断将完成此操作，但是，如果所有 α_i 均为零，则拓扑行为可能由超常的小效应决定，而标准型没有捕捉到。

标准型对于确定系统的分岔很重要，但这需要包括展开参数。

齐次方程和标准样式

在一般情况下，我们通过 $(L_A v)(x) = v'(x)Ax - Av(x)$ 定义与矩阵 A 关联的导数算子 L_A，其中 v 是矢量场，v' 是其矩阵偏导数。然后，L_A 将 j + 1 维的齐次矢量场的矢量空间 V_J 映射到自身中。a_j, b_j 和 u_j 之间的关系由同构方程递归确定

$$L_A u_j = K_j - b_j\ ,$$

其中 $K_1 = a_1$ 并且 K_j 等于 a_j 加上从 $a_1,...,a_{j-1}$ 和 $u_1,...,u_{j-1}$ 计算出的校正项。令 N_j 为 V_j 中 L_A 图像的互补子空间的任何选择;那么有可能选择 u_j 使得每个 $b_j \in N_j$。(取 $b_j = P_j K_j$，其中 P_j: $V_j \to N_j$ 是投影映射，请注意，对于 u_j，可以唯一地求出同系方程。) N_j 的选择称为标准型样式，表示对用户关于什么被认为是“简单”的。此过程的目的是确保对高阶校正项 u_j 进行有界，以便对解 $x(t)$ 的近似在扩展的时间范围内有效。

半单的情况；共振单项式

根据 A 是否为半单纯(对角线化)，该理论分为两种情况。上面的非线性振荡器所说明的半单纯情况是最简单的，并且只有一种有用的样式(其中 N_j 是 L^A 的内核)，最终归因于庞加莱。如果 A 是对角线，并且对角线项为 $\lambda_1,...,\lambda_n$ (通常需要引入具有现实条件的复杂变量)，则很容易描述半简单标准型 $y_1^{m1}\cdots y_n^{mn}$ 满足

$$m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n - \lambda_r = 0\,.$$

这种单项式被称为共振，因为对于纯虚数特征值，该方程式在通常意义上成为频率之间的共振。 Kahn 和 Zarmi(1998)仅在半单纯情况下对标准型进行了基本处理。

非半单的案例

在非半单的情况下，有两种重要的样式，即内积标准型，最初是由于 Belitskii 所致，但被 Elphick 等人(1987)推广，以及 Cushman 和 Sanders 提出的 sl(2)标准型。在内部积样式中，N_j 是 L_A^* 的核，A*是 A 的伴随或共轭转置。在 sl(2)样式中，N_j 是使用 Lie 代数 sl(2)的理论从 A 定义的算子的核。内积样式在此时更受欢迎，但是 sl(2)样式具有更丰富的数学结构，与 sl(2)表示理论以及 Cayley，Sylvester 等人的经典不变理论有着密切的联系。因此，sl(2)样式具有无法用于内积样式的计算算法。还有一种简化的标准型，该样式是通过更改投影从内积样式派生而来的。

可以从 Murdock (2003)的专著中找到对标准型理论的现代介绍，其中包含此处提到的所有样式以及参考和历史评论。Sanders， Verhulst 和 Murdock(2007)的最后几章包含了一些最新的进展。

参考文献

1、Poincaré, H., New Methods of Celestial Mechanics (Am. Inst. of Physics, 1993).

2、Birkhoff, G.D., Dynamical Systems (Am. Math. Society, Providence, 1996).

3、Arnold, V.I., Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations (Springer-Verlag, New York, 1988).

4、Bruno, A.D., Local Methods in Nonlinear Differential equations (Springer-Verlag, Berlin, 1989).

5、Elphick C., Tirapegui E., Brachet M.E., Coullet P., and Iooss G. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. Physica D, 29:95-127(1987).

6、Nayfeh, A.H., Method of Normal Forms. (Wiley, New York, 1993).

7、Kahn P.B. and Zarmi Y., Nonlinear Dynamics: Exploration through Normal Forms. (Wiley, New York, 1998).

8、Murdock J. Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems. (Springer, New York, 2003).

9、Jan Sanders, Ferdinand Verhulst, and James Murdock, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Springer, New York, 2007, xxiii+431.

内部参考文献

10、Jack Carr (2006) Center manifold. Scholarpedia, 1(12):1826.

11、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.

12、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

13、James Murdock (2006) Unfoldings. Scholarpedia, 1(12):1904.

其他链接

Author's webpage

也可看

分岔，动力系统，平衡，Jordan 标准型，Lie 代数，常微分方程，展开

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich
评论者：匿名
接受日期：2006-10-24 14:49:14 GMT