

异宿环

安东尼奥·帕拉西奥斯 (加利福尼亚州圣地亚哥州立大学)

异宿环是解轨迹的集合，它通过鞍-汇来连接平衡，周期解或混沌不变集的序列。有关异宿环及其稳定性的更精确描述，请参见 Melbourne 等(1989)，Krupa 和 Melbourne(1995)，Field(1996)的专著以及 Krupa(1997)的调查文章。这种行为在一般动力系统中是不寻常的。但是，它是具有对称性的动力学系统的一般特征。实际上，对称性的存在可以导致不变的子空间，在该子空间下可以建立一系列的鞍-槽连接，从而导致异宿环行为。随着时间的流逝，典型的轨迹会在快速移动到下一个解之前，在每个解(可能是平衡，环轨道或混沌不变集)附近停留越来越长的时间。由于鞍-汇连接牢固，这些异宿环(称为异宿环)在保持系统对称性的扰动下也很牢固。

同宿异宿环是异宿环的一种特殊情况，其中连接的顺序加入了属于同一群轨道的不变解(平衡，周期解或混沌集)。

寻找异宿环

Melbourne, Chossat 和 Golubitsky(1989)描述了一种在微分方程的对称系统中寻找异宿环的方法。令 $\Gamma \subset O(N)$ 为一个 Lie 子群(其 $O(N)$ 表示 N 阶正交群)，令 $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ 为 Γ 等变，即

$$g(\gamma X) = \gamma g(X),$$

对于所有 $\gamma \in \Gamma$ 。考虑系统

$$\frac{dX}{dt} = g(X).$$

注意，在每个电池中具有 k 个状态变量的 n 电池系统中， $N = kn$ 。 g 的等方差意味着每当 $X(t)$ 是一个解时， $\gamma X(t)$ 也是。使用定点子空间，Melbourne 等(1989)提出了一种建立平衡平衡的异宿环的方法。假设 $\Sigma \subset \Gamma$ 是一个子组。然后是定点子空间

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{X \in \mathbb{R}^N : \sigma X = X \quad \forall \sigma \in \Sigma\}$$

是流量不变子空间。这个想法是找到一个最大子组 $\Sigma_j \subset \Gamma$ 的序列，使 $\dim \text{Fix}(\Sigma_j) = 1$ ，然后找到最大子组 $T_j \subset \Sigma_j \cap \Sigma_{j+1}$ ，使得 $\dim \text{Fix}(\Sigma_j) = 2$ ，如图 1 所示。 $\text{Fix}(\Sigma_j)$ 中的平衡必须是 $\text{Fix}(T_j)$ 中的鞍点，而 $\text{Fix}(\Sigma_{j+1})$ 中的平衡必须是 $\text{Fix}(T_j)$ 中的汇。

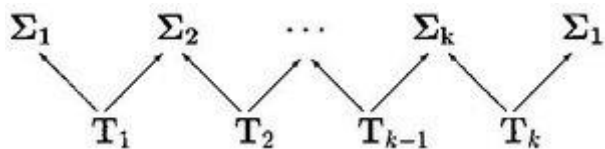


图 1 表明异宿环存在的子群晶格内的模式。

如果 $\text{Fix}(\Sigma_j)$ 中的平衡点与 $\text{Fix}(\Sigma_{j+1})$ 中的平衡点之间的鞍-沉连接存在，则子组的此类配置可能导致异宿环。应该强调的是，可能存在更复杂的异宿环。通常，我们需要知道的是 $\text{Fix}(\Sigma_j)$ 中的平衡是一个鞍点，而 $\text{Fix}(\Sigma_{j+1})$ 中的平衡是不动点子空间 $\text{Fix}(T_j)$ 中的汇(请参阅 Krupa 和 Melbourne(1995))，但通常无法证明这种联系。由于鞍-汇连接在一个平面上很鲁棒，因此只要 γ 均方差被扰动所保留，这些异宿率环对 g 的扰动就稳定。有关异宿轨道的渐近稳定性和近渐近稳定性的详细讨论，这也是非常重要的，请参见 Krupa 和 Melbourne(1995)。

周期解和对称性破裂的异宿环

在 Hopf 分岔的近点，这种构造异宿连接的方法可以推广为包括时间周期解以及平衡。Melbourne, Chossat 和 Golubitsky(1989)通过用 S^1 -在 Hopf 分岔点上的 Poincare-Birkhoff 法则形式的对称群-扩展微分方程的对称群-并在相位差方程中使用相位振幅方程来做到这一点。分析。在这些情况下，由于当对称性破坏时某些不变的定点子空间消失，因此异宿环仅存在于正规形式方程中。但是，当该异宿环渐近稳定时，即使方程式不是正常形式，仍会保持类似异宿环的行为。通过使用渐近稳定性构造关于异宿环的流量不变邻域，然后在正常对称性被破坏时调用正常双曲率来保留流量不变邻域，可以证明这一点。确实，如 Melbourne(1989)所示，即使在没有任何空间对称性的系统中，法线对称也可

以用于产生稳定的异宿环行为。更一般地，还可以得出以下结论：如果可以以截断的范式方程(例如，以三阶或五阶截断的形式)产生渐近稳定的环，则类似行为的异宿环在具有高阶项的方程中仍然存在-即使这些项破坏了对称---和类似异宿环的行为很鲁棒。

例子

Guckenheimer-Holmes 异宿环

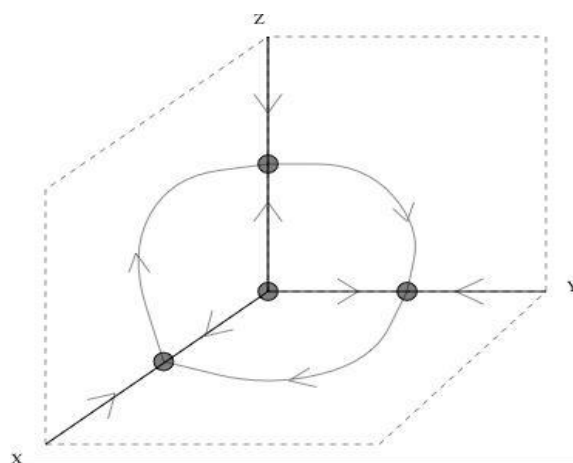


图 2 相空间中的鞍-汇连接描绘了一个非均质异宿环，连接了 Guckenheimer-Holmes 系统的三个平衡点。参数是 $\mu = 1.0, a = 1.0, b = 0.55, c = 1.5$.

图 2 显示了一个由 Guckenheimer 和 Holmes(1988)提出的常微分方程组(ODE)的三个稳态或平衡解的异宿环的例子。但是，这个环是由 Busse 和 Heikes(1980)首先写下的，并描述了它的行为。

在此示例中，组 Γ 具有 24 个元素，并由以下对称性生成

$$\left. \begin{aligned} (x, y, z) &\mapsto (\pm x, \pm y, \pm z) \\ (x, y, z) &\mapsto (y, z, x) \end{aligned} \right|$$

注意，实际上，这是一个同宿异宿环，因为三个平衡点在由 3 阶异宿环生成器给出的群轨道上。ODE 的实际系统可以用以下形式表示

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - (ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= \mu x_2 - (ax_2^2 + bx_3^2 + cx_1^2)x_2 \\ \dot{x}_3 &= \mu x_3 - (ax_3^2 + bx_1^2 + cx_2^2)x_3 . \end{aligned}$$

在描述自行车混乱的相关工作中，Dellnitz 等人。(1995 年)指出，Guckenheimer-

Holmes 系统可以解释为耦合电池系统(具有三个电池),其中每个电池的内部动力由以下形式的叉形分岔支配

$$\dot{x}_i = \mu x_i - a x_i^3,$$

其中 $i = 1, 2, 3$ 是电池数量。当 μ 从负到正通过零变化时,会发生从平凡平衡 $x_i = 0$ 到非平凡平衡 $x_i = \pm\sqrt{\mu}$ 的流形。Guckenheimer 和 Holmes(1988)表明,当 ODE 系统中的剩余项的强度(可以解释为耦合项)很大时,将存在一个渐近稳定的,将这些分岔均衡联系起来的异宿环。电池一中的平衡与电池二中的平衡之间的连接是通过 x_1x_2 -平面中的鞍-汇连接(这由电池的内部对称性强制成为动力学的不变平面)进行的。如 Dellnitz 等(1995 年)进一步指出,三电池系统的整体置换对称性保证了 x_2x_3 -平面和 x_3x_1 -平面中的连接,从而导致了三个平衡解之间的异质性连接。下图显示了 Guckenheimer-Holmes 系统的各个电池或变量随时间变化的轨迹。可以观察到,随着时间的流逝,所有三个轨迹都在每个平衡点附近花费更长的时间,这是预期的。

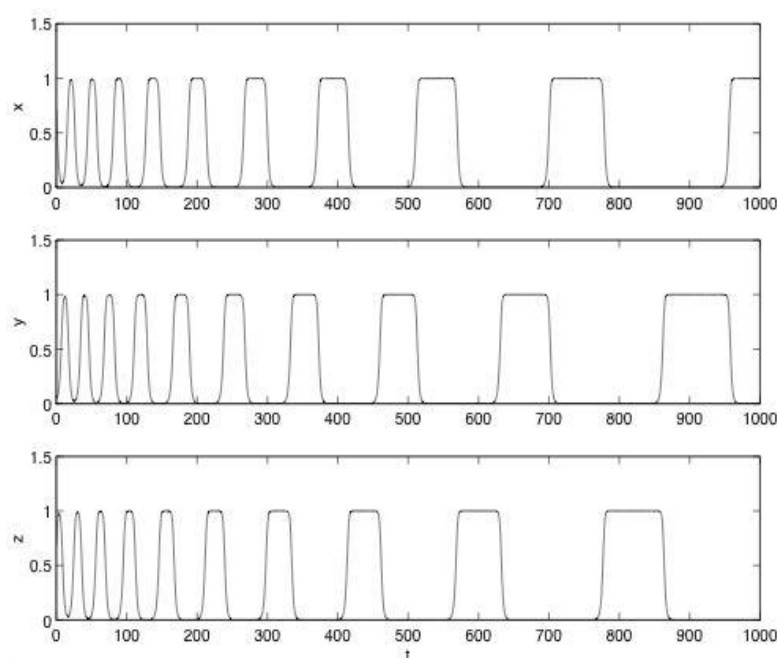


图 3: Guckenheimer-Holmes 系统的异宿环典型附近轨迹的时间序列演化。参数是 $\mu = 1.0, a = 1.0, b = 0.55, c = 1.5$.

另一个例子是 1: 2 共振问题中的异宿环,这是由 Jones 和 Proctor(1987)首次发现的,随后是 J. Fluid Mech 中的一篇较长的论文。

周期对称 ODE 系统的一个异宿环

Melbourne 等(1989)证明了在具有对称性的 $O(2)$ 系统中, 存在稳态 Hopf 和 Hopf/Hopf 模式相互作用时, 存在时间周期解的鲁棒, 渐近稳定的异宿环。在这些对称破坏分岔中, 每个临界特征值都会被对称性加倍---因此, 稳态/Hopf 模式相互作用的中心流形是六维的, 而 Hopf/Hopf 相互作用的中心流形是八维的。众所周知, 在不变均衡处打破对称性的 $O(2)$ Hopf 分岔会导致两种周期解: 驻波(所有时间在单个反射下不变的解)和旋转波(时间演化与空间旋转)。下图显示了一个环, 该环通过将具有 $O(2)$ 对称性的 ODE 的一般系统进行数值积分, 将稳态与从稳态 Hopf 模式相互作用获得的驻波连接起来。

$$\frac{dz}{dt} = g(z, \lambda, \mu) = (C(z), P(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2,$$

其中

$$C(z) = C^1 z_0 + C^3 \bar{z}_0 z_1 \bar{z}_2$$
$$P(z) = P^1 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + P^2 \delta \begin{bmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{bmatrix} + P^3 \begin{bmatrix} z_0^2 z_2 \\ \bar{z}_0^2 z_1 \end{bmatrix},$$

其中 $\delta = |z_2|^2 - |z_1|^2$, $C^j = c^j + i\delta c^{j+1}$, c^j 是实值 $O(2) \times S^1$ -不变函数, $P^j = p^j + q^j i$ 是复值 $O(2) \times S^1$ -不变函数取决于两个参数 λ 和 μ 。该图中的时间序列取自三个不同的坐标 x_0 是稳态模式下的坐标, x_1, x_2 是 Hopf 模式下的坐标。在这些坐标中, 驻波是一种振荡, 其中两个坐标均等地振荡(仅相移)。其他类型的仅涉及周期解的 $O(2)$ 环是从 Hopf/Hopf 模式相互作用获得的, Buono, Golubitsky 和 Palacios(1999)给出了示例。这些异宿环将旋转波与旋转波连接, 并将驻波与驻波连接。

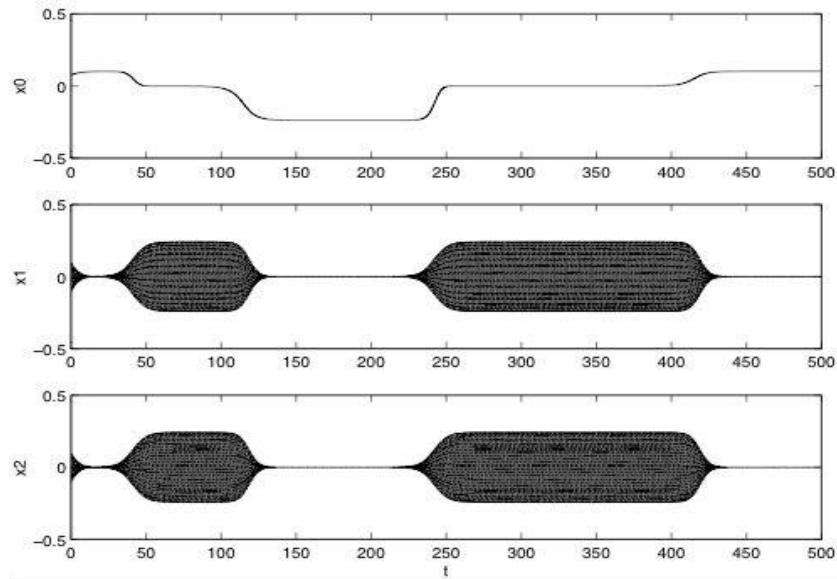


图 5: 由于正态形式, 在 $O(2) \times S^1$ 对称且 S^1 对称的系统中, 将稳态与驻波连接的异宿环。

参数是 $c^1 = \lambda - 1.5\rho - 4N$, $c^2 = 1.3$, $c^3 = -9$,

$p^1 = 1.2\lambda - 3\rho - N$, $p^2 = 4$, $p^3 = 4$, $q^1 = 0.8\lambda + 7$, 其它参数为 0.

具有二面对称性的 ODE 系统的一个异宿环

Buono, Golubitsky 和 Palacios(2000)证明了具有 D_n 对称性的微分方程中存在稳态和时间周期解的异宿环的存在。在他们的方法中, 他们研究了各种模式相互作用-尤其是六维稳态/Hopf 模式相互作用, 其中 D_n 通过其在临界本征空间上的标准表示起作用。他们讨论的确切环可以在 $n=6$ 和 $n=5$ 时具有 $D_n \times S^1$ 对称性的标准型方程中找到-尽管他们的讨论大部分与通用 D_n 系统有关。

考虑例如由六面体组 D_6 描述的具有六边形对称性的微分方程组。六边形的反射对称性有两种(非共轭的)类型: 反射线连接六边形的相对顶点(κ)的对象和对称线连接相对侧的中点($\gamma\kappa$)的对象。已知 D_6 破坏对称的稳态分岔会产生两个非平凡的平衡-一种反射对称类型-一个 D_6 对称破坏的 Hopf 分岔会产生两个驻波-一种反射类型都对称。正常情况下, 这四个解的对称组为 $Z_2(\kappa) \times S^1$, $Z_2(\gamma\kappa) \times S^1$, $Z_2(\kappa) \times Z_2^c$ 和 $Z_2(\gamma\kappa) \times Z_2^c$, 其中 $Z_2^c = Z_2(\pi, \pi)$ 。使用墨尔本等人描述的想法 (1989 年)。下图表明, 鲁棒的, 渐近稳定的异宿环可以出现在 D_6 标准型的对称性破坏稳态/Hopf 模式相互作用的展开中。

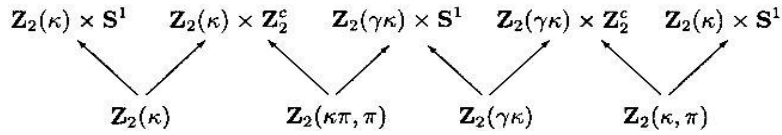


图 5: $D_6 \times S^1$ 晶格中的子组允许存在异宿环。

该异宿环将把具有第一驻波的第一稳态与具有第二驻波的第二稳态连接起来，并返回到第一稳态。具有 $D_6 \times S^1$ 对称性的 ODE 的一般系统具有以下形式

$$\frac{dz}{dt} = g(z, \lambda, \mu) = (C(z), Q(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2,$$

其中

$$C(z) = C^1 z_0 + C^3 \bar{z}_0 z_1 \bar{z}_2 + C^5 \bar{z}_0^5 + C^7 \bar{z}_0 (\bar{z}_1 z_2)^2 + C^9 \bar{z}_0^3 \bar{z}_1 z_2 + C^{11} z_0 (z_1 \bar{z}_2)^3$$

$$Q(z) = Q^1 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + Q^2 \delta \begin{bmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{bmatrix} + Q^3 \begin{bmatrix} z_0^2 z_2 \\ \bar{z}_0^2 z_1 \end{bmatrix} + Q^4 \delta \begin{bmatrix} z_0^2 z_2 \\ -\bar{z}_0^2 z_1 \end{bmatrix} + Q^5 \begin{bmatrix} \bar{z}_0^4 z_2 \\ z_0^4 z_1 \end{bmatrix} + Q^6 \delta \begin{bmatrix} \bar{z}_0^4 z_2 \\ -z_0^4 z_1 \end{bmatrix} +$$

$$Q^7 \begin{bmatrix} \bar{z}_0^2 \bar{z}_1 z_2^2 \\ z_0^2 z_1^2 \bar{z}_2 \end{bmatrix} + Q^8 \delta \begin{bmatrix} \bar{z}_0^2 \bar{z}_1 z_2^2 \\ -z_0^2 z_1^2 \bar{z}_2 \end{bmatrix} + Q^9 \begin{bmatrix} (\bar{z}_1 z_2)^2 z_2 \\ (z_1 \bar{z}_2)^2 z_1 \end{bmatrix} + Q^{10} \delta \begin{bmatrix} (\bar{z}_1 z_2)^2 z_2 \\ -(z_1 \bar{z}_2)^2 z_1 \end{bmatrix},$$

其中 $\delta = |z_2|^2 - |z_1|^2$, $C^j = c^j + i\delta c^{j+1}$, c^j 是实值 $D_6 \times S^1$ 不变函数, 而 $Q^j = p^j + q^j i$ 是复值 $D_6 \times S^1$ 不变函数, 取决于两个参数 λ 和 μ 。此 ODE $D_6 \times S^1$ 等变系统的数值积分(正常形式)产生如下图所示的异宿环。

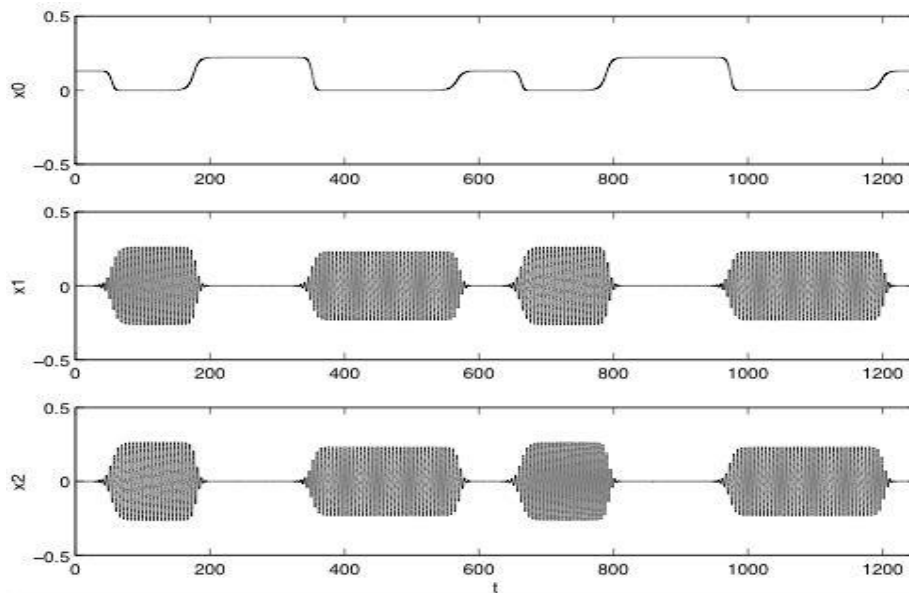


图 6: 在具有 $D_6 \times S^1$ 对称性的系统中, 将稳态 $Z_2(\kappa) \times S^1$ 和 $Z_2(\gamma\kappa) \times S^1$ 与驻波

$Z_2(\kappa) \times Z_2^c$ 和 $Z_2(\gamma\kappa) \times Z_2^c$ 连接起来的异宿环。驻波具有不同的振幅。参数是

$$c^1 = \lambda - 1.5\rho - 4N, c^2 = 1.3, c^3 = -9, c^5 = 0.5,$$

$$p^1 = 1.2\lambda - 3\rho - N, p^3 = 4, p^2 = 4, p^3 = 4, q^1 = 0.8\lambda + 1, q^3 = 8, \text{其他参数为 } 0.$$

下图显示了具有 D_6 对称性的实际六孔环系统中的异宿环。直到三阶，此耦合电池系统的中心流形(按比例缩放后)与上图中的流相同。为了说明的目的，示出了每个电池的第二组件。

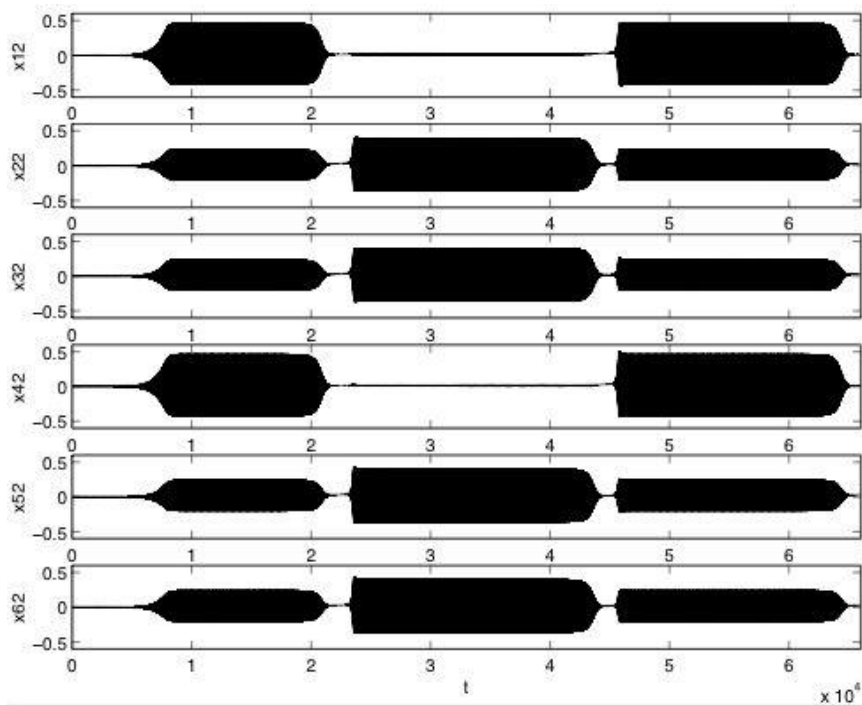


图 7: 具有 D_6 对称性的六电池环系统中的异宿环。为了说明的目的，示出了每个电池的第二组件。

具有圆对称性的 PDE 中的异宿环

Kuramoto-Sivashinsky(KS)方程描述了形成电池模式的动力学系统的一般示例，该方程可以用以下形式表示：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta_1 u - (1 + \nabla^2)^2 u - \eta_2 (\nabla u)^2 - \eta_3 u^3 + \xi(\vec{x}, t),$$

其中 $u = u(\vec{x}, t)$ 表示沿传播方向的平面前沿(通常假定为火焰前沿)的扰动， η_1 测量扰动力的强度， η_2 是与沿方向增长相关的参数 $\eta_3 u^3$ 是垂直于前部区域(燃烧

器)的项, 已被添加以帮助稳定其数值积分, 而 $\xi(\bar{x}, t)$ 代表高斯白噪声, 该噪声模拟了热涨落, 在空间和时间上无量纲。KS 方程描述了热扩散不稳定性对均匀波阵面的扰动。Cross 和 Hohenberg(1993), Armbruster, Guckenheimer 和 Holmes(1988), Holmes, Lumley 和 Berkooz(1996), Hyman 和 Nicolaenko(1986) 在不同的背景下对其进行了研究, 包括是否存在异宿环)。Gassner, Blomgren 和 Palacios(2007) 还对参数空间各个区域中的噪声对 KS 方程的影响进行了数值研究。下图显示了在参数空间区域中的 KS 方程派生的 ODE's 低维系统的相空间图, 在该参数空间区域中, 异宿环存在于 1: 2 模式相互作用附近。

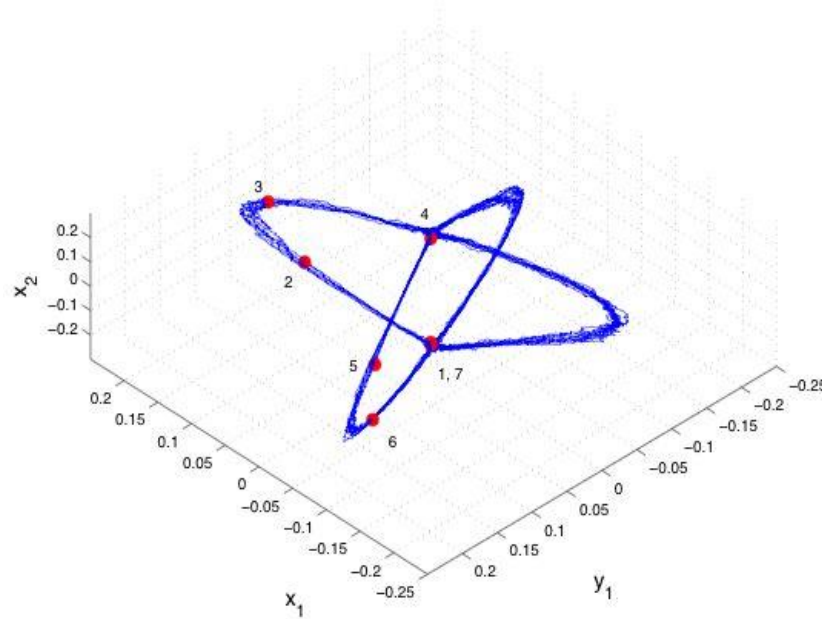


图 8: 在 Kuramoto-Sivashinsky 方程中发现的一个杂相异宿环的相空间描述。参数是 $R = 4.285$ (积分域的半径), $D = 0.0008$ (噪声强度) 和 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0.32, 1.0, 0.17)$.

在物理空间中, 1: 2 异质环表示一个电池格模式和两个电池格模式之间的重复偏移, 如下图所示。

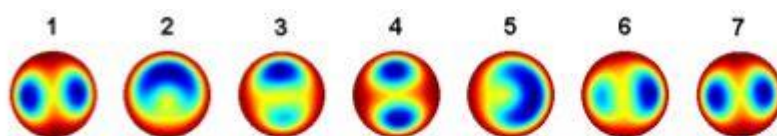


图 9: 在 Kuramoto-Sivashinsky 方程中发现的异宿波解 $u = u(\vec{x}, t)$:。参数是

$R = 4.285$ (积分域的半径), $D = 0.0008$ (噪声强度) 和 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0.32, 1.0, 0.17)$.

参考文献

- 1、 Armbruster, D., Guckenheimer, J., and Holmes, P. (1988). Heteroclinic cycles and modulated traveling waves in systems with $O(2)$ symmetry. *Physica D* 29:257--282.
- 2、 Buono, P.-L., Golubitsky, M., and Palacios, A. (2000) Heteroclinic cycles in rings of coupled cells. *Phys. D* 143:74--108.
- 3、 Buono, P.-L., Golubitsky, M., and Palacios, A. (1999) Heteroclinic cycles in systems with D_n symmetry. In: *Bifurcation Theory and its Numerical Analysis*. (Z. Chen, S-N Chow and K. Li, eds), Springer-Verlag Singapore Pte. Ltd. 13--27.
- 4、 Busse, F.H. and Heikes, K.E. (1980). Convection in a rotating layer: A simple case of turbulence. *Science* 11:173-175.
- 5、 Cross, M.C. and Hohenberg, P.C. (1993). Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*. 65:85.
- 6、 Dellnitz, M., Field, M., Golubitsky, M., Ma, J., and Hohmann, A. (1995) Cycling chaos. *Int. J. Bif. Chaos* 5:1243-1247
- 7、 Field, M.J. (1996) *Lectures on Bifurcations, Dynamics and Symmetry*. Pitman Res. Notes 356, Addison-Wesley Longman Ltd., Harlow.
- 8、 Gassner, S., Blomgren, P., and Palacios, A. (2007). Noise-induced intermittency in pattern-forming systems. *Int. J. Bif and Chaos*. (In Press).
- 9、 Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1988). Structurally stable heteroclinic cycles. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 103:189-192.
- 10、 Holmes, P., Lumley, J.L. and Berkooz, G. (1996). *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press.
- 11、 Hyman, J.M., Nicolaenko, B., and Zaleski, S. (1986). Order and complexity in the Kuramoto-Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces. *Physica D* 23:265--292.
- 12、 Jones, C.A. and Proctor, M.R.E. (1987). Strong spatial resonance and travelling waves in Bernard convection. *Phys. Lett.* 1 121:224-227.

- 13、 Krupa, M. (1997) Robust heteroclinic cycles. *J. Nonlin. Sci. No. 2*, 7:129--176.
- 14、 Krupa, M. and Melbourne, I. (1995) Asymptotic stability of heteroclinic cycles in systems with symmetry. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 15:121--147.
- 15、 Melbourne, I. (1989) Intermittency as a codimension-three phenomenon. *Dyn. Diff. Eqn.* 1:347--367.
- 16、 Melbourne, I., Chossat, P., and Golubitsky, M. (1989) Heteroclinic cycles involving periodic solutions in mode interactions with $O(2)$ symmetry. *Proc. Roy. Soc. of Edinburgh.* 113A:315--345.

内部文献

- 17、 Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. *Scholarpedia*, 1(10):1858.
- 18、 John Guckenheimer (2007) Bifurcation. *Scholarpedia*, 2(6):1517.
- 19、 Jack Carr (2006) Center manifold. *Scholarpedia*, 1(12):1826.
- 20、 James Meiss (2007) Dynamical systems. *Scholarpedia*, 2(2):1629.
- 21、 Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. *Scholarpedia*, 2(10):2014.
- 22、 Jeff Moehlis and Edgar Knobloch (2007) Equivariant bifurcation theory. *Scholarpedia*, 2(9):2511.
- 23、 Jeff Moehlis and Edgar Knobloch (2007) Equivariant dynamical systems. *Scholarpedia*, 2(10):2510.
- 24、 James Murdock (2006) Normal forms. *Scholarpedia*, 1(10):1902.
- 25、 Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. *Scholarpedia*, 1(7):1358.
- 26、 Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. *Scholarpedia*, 1(10):1838.
- 27、 James Murdock (2006) Unfoldings. *Scholarpedia*, 1(12):1904.

外部链接

- [Antonio Palacios's website](#)

也可看

Andronov-Hopf 分岔，等变分岔理论，等变动力系统，异宿环分岔，标准型

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2007-01-31 05:00:43 GMT