状态空间

戴维・H・特曼 (俄亥俄州立大学，俄亥俄州哥伦布市)

尤金・M・伊奇凯维奇 (学术百科全书主编，同行评审开放存取百科全书)

状态空间是动力系统所有可能状态的集合。系统的每个状态对应于状态空间中的唯一点。例如，理想摆的状态由其角度和角速度唯一定义，因此状态空间是所有可能的对“(角度，速度)”对的集合，它们形成圆柱 $S^1 \times R$，如图 1 所示。

通常，任何抽象集都可以是某个动力学系统的状态空间。一个状态空间可以是有限的，仅由几个点组成。它可以是有限维的，由无数个点组成，它们形成一个平滑流形，通常在常微分方程和映射中就是这种情况。这种状态空间通常称为相空间。状态空间可以是无限维的，如偏微分方程和时滞微分方程。在符号动力学中，它是零维的 Cantor 集。

动力学系统的自由度数是其相空间的维数，即，建模者认为需要使用变量数来完整地描述该系统。在哈密顿系统中，自由度的数量是状态变量对的数量。

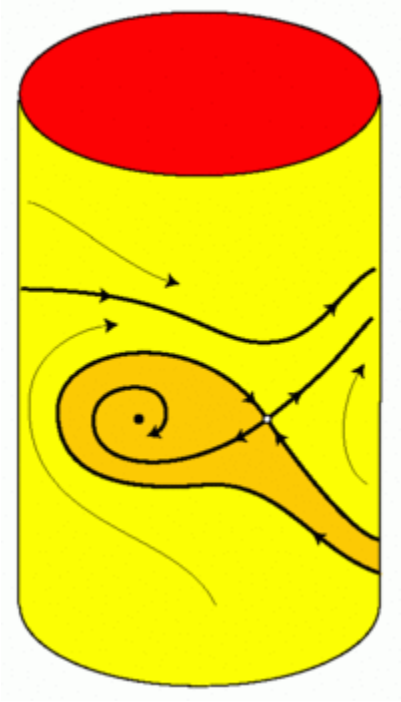

图 1：带扭矩的阻尼摆的相图(请参阅 VCON)。

相图

诸如静止状态或周期性振荡之类的动态状态对应于相空间中的几何对象，诸

David H. Terman and Eugene M. Izhikevich (2008), Scholarpedia, 3(3):1924.
doi:10.4249/scholarpedia.1924

如点或闭合曲线。动力系统的演化对应于相空间中的轨迹(或轨道)。不同的初始状态导致不同的轨迹。所有轨迹的集合形成了动力学系统的相图，尽管在实践中仅考虑了代表性轨迹。由于通常无法为非线性方程式的求解导出明确的公式，因此相图分析为可视化和理解解的定性特征提供了极为有用的方法。

相线

当动态系统的状态可以由标量值 $x \in R^1$ 指定时，则该系统是一维的。通常，只有相线 R^1 的一个子集对应于系统的物理上有意义的状态，考虑间隔和圆圈形式的一维相空间通常更为自然。例如，该系统可以是以试剂浓度为特征的化学反应或以电容器两端的电压为特征的 RC 电路。请注意，在前一种情况下，只能使用 R^1 的非负值，因此相空间为[0，∞)。

一维系统通常由以下形式的常微分方程(ODE)给出

$$x' = f(x)$$

其中 $x' = dx/dt$ 是状态变量 x 相对于时间 t 的导数。 该 ODE 是自治的，即 f 不明确取决于时间 t。

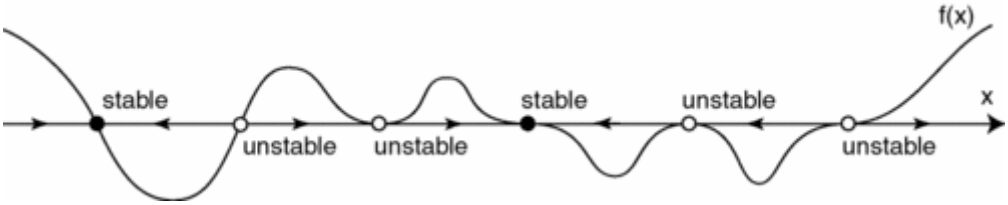

图 2：x'= f(x)的相图描绘了相线 R1 上的平衡和典型轨迹(从平衡中复制)。

一维 ODE 的相线由平衡点(f(x)= 0 的点)和连接平衡点的轨迹分开，如图 2 所示。平衡点的稳定性由轨迹的方向确定，其中 取决于右侧函数 f(x)的符号。无需求解此方程，甚至无需知道函数 f(x)的确切细节即可预测系统的动力学及其对初始条件的依赖性，可从相图可以明显看出。

一维系统也可以通过以下形式的迭代映射来给出

$$x_{t+1} = f(x_t)\ ,$$

其中时间 t + 1 的状态是时间 t 的状态的函数。这样的系统的相图可能非常复杂，尤其是在动力学混乱的情况下。 一维状态空间也可能更复杂，例如图形或树状

图。

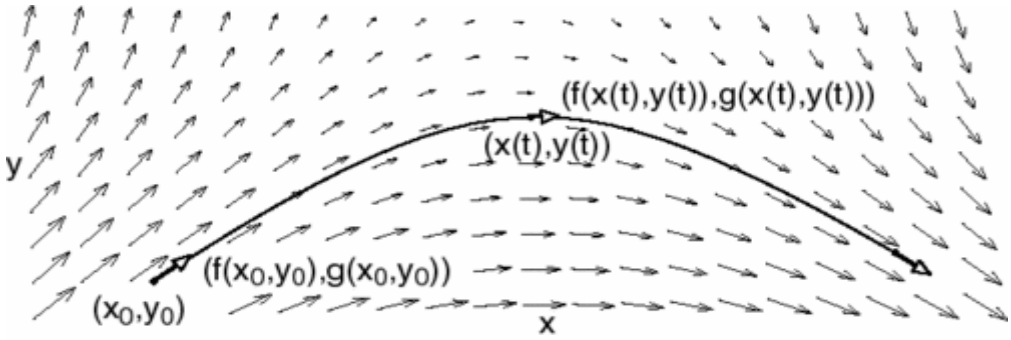

图 3：相平面。 二维动力学系统的右侧定义了一个矢量场。 方程的解定义了相平面中的曲线或轨迹。 向量场始终指向轨迹流动的方向。

相平面

相平面通常在二维自主 ODE 的上下文中出现，可以将 ODE 形式为

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)\,.$$

在此，f 和 g 被赋予(平滑)功能。这两个变量可以描述例如粒子的位置和速度，捕食者-被捕食者系统的状态或在均匀化学反应中两种试剂的浓度。

如果 (x(t)，y(t)) 是系统的解，则在每次 t = p 时，(x(p)，y(p)) 定义相平面中的一个点。该点随时间变化，因此整个解 (x(t)，y(t)) 会在相平面中绘制出一条曲线或轨迹。

当然，并不是每个在相平面上任意绘制的曲线都代表一种解决方案。解决方案轨迹的特殊之处在于，沿着轨迹的每个点的速度矢量由上述微分方程的右侧给出。也就是说，在点 (x(p)，y(p)) 上的轨迹(x(t)，y(t)) 的速度矢量由 (x'，y') =(f(x(p)，y(p))，g(x(p)，y(p)))。这种几何性质-向量(f(x，y)，g(x，y))始终指向解的流动方向-完全表征了解的轨迹(被视为相空间的子集)。将(f(x，y)，g(x，y))分配给(x，y)的函数称为向量领域。

二维动力学系统的平衡点均为 f = 0 和 g = 0。注意，如果(x_0，y_0)是一个平衡点，则所有时间的(x(t)，y(t))≡(x_0，y_0)是系统的一个(常数)解。平衡可以是稳定的也可以是不稳定的。

David H. Terman and Eugene M. Izhikevich (2008), Scholarpedia, 3(3):1924.
doi:10.4249/scholarpedia.1924

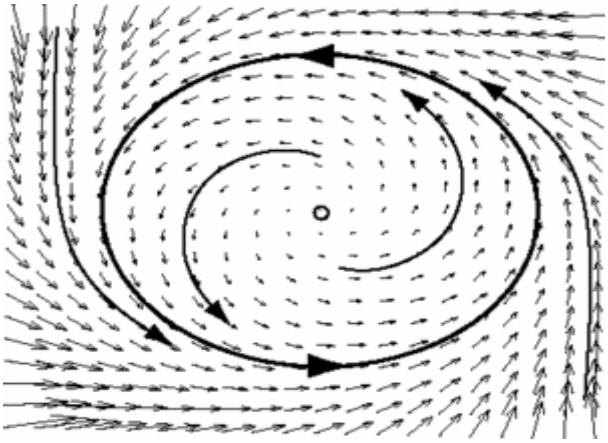

图 3：周期解对应于相平面中的闭合曲线。

如果(x(0)，y(0))=(x(T)，y(T))对于某些 T >0，则动力系统的非恒定解(x(t)，y(t))是周期的 0。满足此要求的最小 T 称为周期。因为对于所有 t(x(t)，y(t))=(x(t + T)，y(t + T))，所以周期解对应于相平面中的闭合曲线。周期解可以是稳定的也可以是不稳定的。大致来说，如果在闭合曲线附近开始的解对于所有 t > 0 都保持接近(这对应于周期轨道的轨道稳定性)，则周期解是稳定的。

通常，找到周期解比找到平衡要困难得多。平衡点(x_0，y_0)满足方程 f (x_0，y_0)= g(x_0，y_0)= 0，这些方程通常可以通过简单的数值方法求解。我们还注意到，平衡是一个局部对象，它只是相空间中的一个点。振荡或周期性轨道是整体对象；它们对应于相空间中可回溯的整个曲线。该曲线可能非常复杂。

二维相空间也出现在以下形式的离散动力系统中

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t)$$

$$y_{t+1} = g(x_t, y_t)\,.$$

通常，与连续时间情况一样，相空间可以是 R^2 的子集，也可以是具有或不具有边界的任何表面。

高维系统

更一般地，考虑以下形式的 n 个一阶微分方程组：

$$u' = F(u), \quad u \in R^n\,.$$

相空间只是 n 维欧几里德空间，每个解 u(t)对应于由独立变量 t 参数化的相空间中的轨迹。 如前所述，F(u)在相空间中定义了一个矢量场；在每个点 u(p)处，

向量 F(u(p))必须与解曲线 u(t)相切。 此外，平衡点是 F(u)= 0 且周期解对应于闭合轨道。

类似地，在迭代映射中会出现 n 维相空间

$$u_{t+1} = F(u_t)\ ,$$

$u \in \mathbb{R}^n$，考虑 R^n 或 n 维流形的子集通常更自然。

抽象状态空间

根据最抽象的定义，动力系统是 Abelian 群 (或半群) 与空间 X 的所有自同构 (半群情况下的内同态) 的群的同态。空间 X 是定义的动力系统的状态空间。它可以是具有任何拓扑或完全没有拓扑的任何空间；它可以是有限的或无限的。迭代理论通常会考虑抽象状态空间(无结构)，遍历理论通常会考虑概率空间，动力学系统理论通常会考虑拓扑空间，尽管动力学系统理论通常会包含前两种理论。在应用程序中，状态空间的选择应反映所考虑系统的约束，并且必须尽可能简单直观。

例子

一个简单的相图

考虑系统

$$\begin{aligned} x' &= y - x^2 + x \\ y' &= x - y. \end{aligned}$$

注意，有两个平衡点； 它们分别在 (0,0) 和 (2,2) 处。使用线性化方法，我们发现 (0,0) 是一个鞍点，而 (2,2) 是一个稳定结点。分析相平面的一种有用方法是绘制零斜线。 x-零斜线是 x'= 0；这是曲线 $y = x^2-x$。沿着 x 零斜线，矢量场根据 y' 的符号向上或向下。 y-零斜线是 y'= 0；这就是曲线 y = x。 沿着 y-零斜线，矢量场根据 x' 的符号指向左侧或右侧。 请注意，零线将相平面划分为单独的区域。给定区域内的所有向量都指向同一象限。一旦我们找到了平衡点并绘制了零斜线，通常就可以在某些规定的初始条件下预测溶液的行为。

David H. Terman and Eugene M. Izhikevich (2008), Scholarpedia, 3(3):1924.
doi:10.4249/scholarpedia.1924

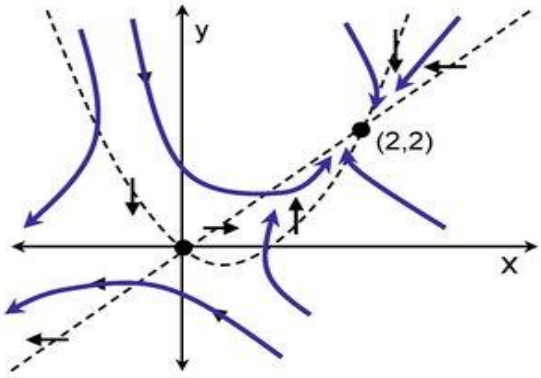

图 5：该示例相平面在(0,0)和(2,2)处具有平衡。 零点线用虚线表示，而某些轨迹用实线表示。

钟摆

摆的方程可以写成 x"+ sin(x)= 0，其中 x 是从垂直向下的角度。为了使用相平面分析，我们将此二阶微分方程写为一阶系统：

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\sin(x). \end{aligned}$$

注意，有无限多个平衡点。 它们在(x，y)=(kπ，0) 处，其中 k 是任何整数。角度之间相差 2π之间没有物理差异，因此我们仅考虑(0,0)和(π，0)处的平衡(即将相平面视为圆柱体的覆盖空间)。使用线性化方法，我们发现(π，0)是一个鞍点。特征值是±1。原点的特征值是±i。 由于它们位于虚轴上，因此我们无法直接通过线性化方法确定原点的稳定性。

为了绘制相图，我们使用该系统是保守的事实。 即，总能量 E(x，y)＝ y^2 / 2-cos(x) 沿着解轨迹恒定。 通过相对于 t 区分 E (x(t)，y(t)) 并使用微分方程，可以轻松地验证这一点。相平面中的轨迹则表示恒定能量的曲线。

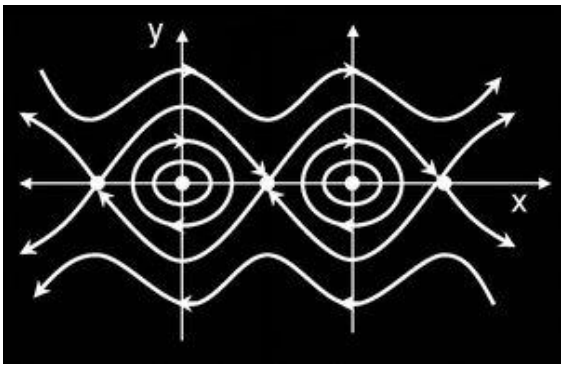

图 5：摆方程的相图。

David H. Terman and Eugene M. Izhikevich (2008), Scholarpedia, 3(3):1924.
doi:10.4249/scholarpedia.1924

内部参考文献

1、John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517. doi:10.4249/scholarpedia.1517.

2、James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629. doi:10.4249/scholarpedia.1629.

3、Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014. doi:10.4249/scholarpedia.2014.

4、James Meiss (2007) Hamiltonian systems. Scholarpedia, 2(8):1943. doi:10.4249/scholarpedia.1943.

5、Kendall E. Atkinson (2007) Numerical analysis. Scholarpedia, 2(8):3163. doi:10.4249/scholarpedia.3163.

6、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358. doi:10.4249/scholarpedia.1358.

7、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838. doi:10.4249/scholarpedia.1838.

8、Emmanuil E. Shnol (2007) Stability of equilibria. Scholarpedia, 2(3):2770. doi:10.4249/scholarpedia.2770.

推荐读物

9、Izhikevich E. M. (2007) Dynamical systems in neuroscience: The geometry of excitability and bursting. The MIT Press.

10、Strogatz, S. H. (1994). Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Reading, MA: Perseus Books, Cambridge MA.

11、Terman, D. (2005). An introduction to dynamical systems and neuronal dynamics, in Tutorials in Mathematical Biosciences I, Mathematical Neuroscience, Springer: 21-68.

David H. Terman and Eugene M. Izhikevich (2008), Scholarpedia, 3(3):1924.
doi:10.4249/scholarpedia.1924

其他链接

- David Terman's webpage
- Eugene M. Izhikevich's webpage

也可看

吸引子，分叉，动力系统，平衡，周期轨道，张弛振荡器，稳定性，平衡稳定性

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2008-02-29 02:30:25 GMT

David H. Terman and Eugene M. Izhikevich (2008), Scholarpedia, 3(3):1924.
doi:10.4249/scholarpedia.1924