动力系统

詹姆斯·梅斯教授 (美国科罗拉多州博尔德市科罗拉多应用数学大学)

动力系统是状态空间上时间演化的规则。

介绍

动力学系统由抽象相空间或状态空间(其坐标可随时描述状态)和动力学规则组成，该动力学规则仅在给定相同状态变量的当前值的情况下指定所有状态变量的近期状态。例如，一个钟摆的状态是它的角度和角速度，而演变规律是牛顿方程 F = ma。

在数学上，动力学系统由初值问题描述。这意味着存在时间概念，并且某个时间的状态演变为一个状态，或者可能在以后的某个时间演变为状态的集合。因此，状态可以按时间排序，并且可以将时间视为单个数量。

如果每个状态都有唯一的结果，则动力系统是确定性的；如果可能结果的概率分布是随机的或随机的，则动力学系统是确定性的(理想的抛硬币有两个结果，每个初始状态的概率均等)。

动力系统可以具有离散或连续的时间。具有离散时间的确定性系统由映射定义，

$$x_1 = f(x_0),$$

在下一个时间值给出从初始状态 x_0 得出的状态 x_1。在时间 n 之后

$$x_n = f^n(x_0),$$

其中 f^n 是 f 的第 n 个迭代。具有连续时间的确定性系统中由流定义，

$$x(t) = \varphi_t(x(0)),$$

假设状态在时间 0 时为 $x(0)$，则在时间 t 给出状态。可以针对时间对平滑流进行微分以给出微分方程 $dx/dt = X(x)$。函数 $X(x)$ 称为向量场，它给出一个向量，该向量指向相空间中每个点的速度方向。

James Meiss (2007), Scholarpedia, 2(2):1629. doi:10.4249/scholarpedia.1629

定义

动力系统是一个状态空间 S，一组时间 T 和一个用于演化的规则 R，其中 R：S×T→S，将结果赋予状态 s∈S。可以将动态系统视为描述系统时间演变的模型。

状态空间

状态空间是坐标的集合，描述了建模人员要提供完整的系统描述所需的所有感觉。给定系统的当前状态，演化规则将预测下一个状态。除了随时间变化的状态外，模型还可以依赖于恒定的参数或可能是时间的已知函数，例如机械模型中的物体质量或人口模型中的出生率和承载能力。

状态空间可以是离散的也可以是连续的。例如，抛硬币可以通过一个由正面和反面两个状态组成的状态空间建模。因此，每次的状态 s 是集合 H，T 的元素。一个离散的空间也可以具有无限多个状态。例如，可以将随机游走限制为点阵，而系统状态就是当前占据的点阵。

当状态空间连续时，它通常是一个平滑的流形。在这种情况下，它称为相空间。例如，将一个简单的摆锤建模为一个刚性杆，该杆从一个垂直的重力场悬挂在一个枢轴上，该枢轴允许摆锤在一个平面内振荡。根据牛顿，了解杆相对于垂直方向的角度θ 和角速度$v = d\theta / dt$ 的知识足以描述摆的状态。因此，摆的相空间是二维流形θ和v可能值的集合。因为θ是周期性的，所以该流形是圆柱体。除了钟摆的状态外，模型还取决于两个参数，钟摆的长度和重力强度。

相空间也可以是无限维的，例如功能空间。通过偏微分方程建模的动力学就是这种情况。

时间

时间也可以是离散的或连续的，或更通常地由拓扑组表示。具有离散时间的动力系统(如理想的抛硬币)仅在一定的离散间隔后才评估其状态。在抛硬币的情况下，将忽略硬币的平稳翻滚和弹跳，并且仅在硬币达到平衡时才能查看其状态。通常用离散时间建模的其他系统包括种群动态(离散性是指后代)和影响系统，例如仅使用处于影响状态的台球。通常将离散时间间隔缩放为 1，因此允许时间的集合变为 T = Z 或可能只有非负整数 T = N。即使在撞球之类的实际物理时间间

隔可能不是恒定的情况下，这也很方便。

当牛顿将常微分方程(ODE)的概念引入力学时，动力学系统首次出现。在这种情况下，T = R。然而，亨利 • 庞加莱(Henri Poincaré)是动力学系统的现代定性理论之父。他认识到，通过选通，即使微分方程也可以看作是离散时间系统，即仅记录一组离散时间的解，或者通过庞加莱部分。当然，这在任何计算算法以及任何实验测量中都是必需的，因为只能测量有限的多个值。

演化规则

演化规则提供对从当前状态空间值开始的下一个或多个状态的预测。如果每个状态都有唯一的结果，则演化规则是确定性的；如果给定状态有多个可能的结果，则演化规则是随机的(或“随机”)。

状态 s 的前进轨道或轨迹是使用演化规则从 s 跟随的时间的有序集合。对于具有离散时间的确定性规则，s_0 的前向轨道是序列 $s_0, s_1, s_2, \cdots$。当状态空间和时间都连续时，前向轨道为曲线 $s(t), t \geq 0$。

如果每个状态都有唯一的先例或原像，则确定性演化规则是可逆的。在这种情况下，系统的完整轨道是从 s0 或 s(0)开始并在两个时间方向上延伸的双无限序列或曲线。

图 1：亨利 • 庞加莱(HenriPoincaré)，动力系统之父。

例子

映射

具有离散时间和连续状态空间的确定性演化规则称为映射，

$$f : S \to S .$$

演化由迭代 $s_{t+1} = f(s_t)$ 定义。 映射可以是一对一的(可逆的)，也可以不是。可逆映射可以是连续的，具有连续逆的(同胚)，也可以是平滑且平滑的可逆(微妙)。

一个简单的例子是人口动态的逻辑图。这里的状态空间是 R^+，是非负实数，表示人口数量的连续近似值。 映射是

$$f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{1}$$

其中 r 是每个人的增长率，K 是承载能力。映射(1)不可逆，因为间隔[0，K]中的大多数状态都有两个原像。

流

流是流形 M 上的确定性动力学系统，它可以随时间连续微分。 由功能定义

$$\varphi : R \times M \to M ,$$

这样轨道是由

$$x(t) = \varphi_t(x(0))$$

流服从属性

- 恒等式

$$\varphi_0(x) = x$$

- 组

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$$

- 可微性

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x)|_{t=0} = X(x)$$

第二个属性称为组属性；它表达了一个概念，即动力学可以在沿其轨迹的任意点 $x(s)$ 重新启动，以获得与从 $x(0)$ 向前流过时间 t + s 相同的结果 $x(t+s)$。最后

一个属性(可微性)定义了与任何流相关联的向量字段 X。群性质的结果是流的轨道是常微分方程的解

$$\frac{d}{dt}x = X(x)$$

通过流的概念定义与微分方程相关的动力学是很方便的，因为这样可以避免 ODE 解的存在性和唯一性问题：流的轨道是唯一的(只有一个轨道通过 M 中的每个点)，并且一直存在。对于 ODE，通常情况并非如此。

半流是仅为时间的非负值定义的流。偏微分方程通常会出现半流动。

迭代函数系统

具有离散时间但连续相空间的随机演化是一个迭代函数系统。在这种情况下，存在由参数 α 索引的函数 f_α 的集合。演化是随机的，下一状态为 $s_{t+1}=f_\alpha\left(s_t\right)$ ，其中 α 是从概率分布中选择的。

即使函数是收缩图，迭代函数系统也可以生成有趣的动力学。在这种情况下，轨道通常被吸引到某些分形集合。

细胞自动机

具有确定性规则，离散时间和离散状态空间的动力学系统是细胞自动机。演化规则根据该单元的旧状态及其有限的许多邻居的状态为该单元分配新状态。每个单元的(相对)规则相同。

一个例子就是生命游戏，其中在飞机上有一个正方形网格，每个单元可以假设 2 种状态：存活或死亡(但只有有限的许多活细胞)。

参考文献

1、Alligood, K. T., T. D. Sauer and J. A. Yorke (1997). Chaos. New York, Springer-Verlag.

2、Arrowsmith, D. K. and C. M. Place (1990). An Introduction to Dynamical Systems. Cambridge, Cambridge University Press.

3、Birkhoff, G. D. (1927). Dynamical Systems. New York, Am. Math. Soc.

4、Chicone, C. (1999). Ordinary Differential Equations with Applications. New York, Springer-Verlag.

5、Devaney, R. L. (1986). An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Menlo Park, Benjamin/Cummings.

6、Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983). Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York, Springer-Verlag.

7、Katok, A. B. and B. Hasselblatt (1999). Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge, Cambridge University Press.

8、Moser, J. K., Ed. (1975). Dynamical Systems Theory and Applications. Springer Lecture Notes in Physics. Berlin, Springer-Verlag.

9、Ott, E. (1993). Chaos in Dynamical Systems. Cambridge, Cambridge Univ. Press.

10、Poincaré, H. (1892). Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste. Paris, Gauthier-Villars.

11、Robinson, C. (1999). Dynamical Systems : Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. Boca Raton, Fla., CRC Press.

12、Strogatz, S. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos. Reading, Addison-Wesley.

13、Wiggins, S. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. New York, Springer-Verlag.

内部参考文献

14、Lawrence F. Shampine and Skip Thompson (2007) Initial value problems. Scholarpedia, 2(3):2861.

15、Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014.

16、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.

17、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

18、Joseph Auslander (2008) Topological Dynamics. Scholarpedia, 3(6):3449.

19、John W. Milnor (2006) Attractor. Scholarpedia, 1(11):1815.

20、John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517.

21、Leonid Bunimovich (2007) Dynamical billiards. Scholarpedia, 2(8):1813.

22、James Meiss (2007) Hamiltonian systems. Scholarpedia, 2(8):1943.

其他链接

James Meiss' website

也可看

吸引子，分叉，混沌，差分方程，平衡点，不动点，哈密顿系统，映射，常微分方程，偏微分方程，周期轨道，相空间，相画像，张弛振荡器，稳定性，拓扑动力学

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期： 2007-02-09 18:05:24 GMT