

## 周期轨道

杰夫·莫利斯 (加州大学圣塔芭芭拉分校)

克雷西米尔·乔西克 (德克萨斯州休斯顿休斯顿大学)

埃里克·谢伊·布朗 (华盛顿大学)

周期性轨道对应于动力系统的一种特殊类型的解,即一种在时间上重复自身的解。表现出稳定的周期性轨道的动力学系统通常称为振荡器。

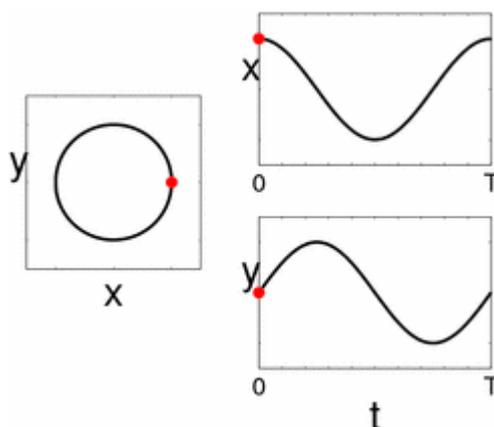


图 2: 映射的周期性轨道。

### 定义

#### 向量场的周期轨道

考虑一个常微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2)$$

或

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (n \geq 1),$$

分别对应于自治或非自治向量字段。如果存在一个常数  $T > 0$  使得该系统的非常数解  $x(t)$  是周期性的

$$x(t) = x(t + T)$$

对于所有  $t$ 。该解的周期被定义为最小的  $T$ 。状态空间  $\mathbb{R}^n$  中  $x$  之下的周期性间隔  $[0, T]$  的图像称为周期性轨道或周期。

## 极限环

如果平面上(或二维流形上)的周期性轨道  $\Gamma$  是不在周期性轨道上的某个点  $z$  的  $\alpha$  极限集合或  $\omega$  极限集合, 则称为极限环。分别通过  $z$  的向前或向后轨迹的累积点正好是  $\Gamma$ 。渐近稳定和不稳定的周期性轨道是极限环的例子。

例子(Guckenheimer and Holmes, 1983; Strogatz 1994)

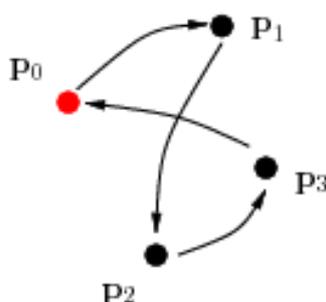


图 2: 映射的周期性轨道。

该图显示了矢量场存在的周期轨道

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

其中  $\alpha > 0$  是参数。转换为径向坐标, 我们看到对于任何  $\alpha > 0$ , 周期性轨道都位于具有单位半径的圆上:

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r(1 - r^2), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

对于  $\alpha > 0$ , 该周期性轨道是稳定的极限周期, 对于  $\alpha < 0$ , 该周期性轨道是不稳定的极限周期。当  $\alpha = 0$  时, 以上系统具有无限数量的周期轨道, 并且没有极限环。

## 映射的周期性轨道

映射周期为  $k$  的周期性轨道

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1$$

是  $k$  个不同点  $p_j = g^j(p_0) | j = 0, \dots, k-1$  的集合, 其中  $g^k(p_0) = p_0$  (Guckenheimer and Holmes, 1983)。  $g^k$  代表  $g$  的组成, 其本身为  $k$  次。保持该等式  $k$  的最小正值是轨道的周期。图中示出了映射的周期性轨道的示例。

### 周期轨道的存在(或不存在)

有时可以使用以下技术通过分析证明动力系统存在或不存在周期性轨道。其中一些适用于自主平面矢量场

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

### 指数理论

对于自主平面矢量场, 可以使用指数理论来证明这一点(Guckenheimer 和 Holmes, 1983 年):

在由周期性轨道包围的区域内, 必须至少有一个平衡点, 即  $F(x, y) = G(x, y) = 0$  的点。如果只有一个, 则必须是接收器, 源或中心。如果周期轨道内的所有平衡都是双曲的, 则必须有一个奇数  $2m + 1$ , 其中  $m$  是鞍点,  $m + 1$  是汇或源。

这对于显示相空间区域中不存在周期性轨道可能是有用的: 如果不存在适当的平衡, 则周期性轨道将不存在。

### 狄拉克准则

对于自主平面向量场, 杜拉克准则确定(Guckenheimer 和 Holmes, 1983):

令  $B(x, y)$  是定义在简单连接区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上的标量函数 (因此  $D$  中没有孔)。

如果  $\frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y}$  不等于零并且在  $D$  中没有改变符号, 则没有周期性轨道完全位于  $D$  中。

### 本迪克森准则

狄拉克准则是本迪克森准则的推广, 对应于以上结果中的  $B(x, y) = 1$ 。这些标准对于显示相位空间区域中不存在周期性轨道可能有用。

## 庞加莱-本迪克森定理

对于自主平面向量场,庞加莱-本迪克森定理暗示(Guckenheimer and Holmes, 1983):

如果轨迹进入并且没有离开不包含任何平衡点的相空间的封闭且有界区域,则轨迹必须接近周期轨道,即  $t \rightarrow \infty$ 。

有时可以将其用于建立平面矢量场的(稳定)周期轨道的存在。

## 利纳德系统

对于满足利纳德方程的非线性振荡器

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} + G(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

在  $F$  和  $G$  的适当一般假设下,可以建立唯一稳定的极限环的存在。例如,阻尼系数  $F$  在相空间原点  $x = \frac{dx}{dt} = 0$  附近必须为负,因此,靠近原点的轨迹向外螺旋,而  $F$  必须远离原点为正,从而远离原点螺旋向内的轨迹。有关详细讨论,请参见 Jordan 和 Smith(1977)。

## 快-慢平面系统

对于快-慢的自主平面矢量场

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \epsilon G(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \epsilon \ll 1,$$

简单的几何零斜线分析可以表明存在松弛振荡,这是一种特殊的周期性轨道(Keener 和 Sneyd, 1998)。在某些情况下,可以使用 Poincare-Bendixson 定理证明周期轨道的存在,但这不能证明该轨道是松弛振荡。Grasman(1987) 和 Mishchenko (1994) 等人给出了松弛振荡的严格结果。这些利用了几何奇异摄动理论,并且超出了平面情况。快-慢系统也可以具有称为 canard 的特殊周期轨道解,尽管这些解对平面系统中的扰动并不鲁棒。

## 希尔伯特的第十六个问题

1900年,戴维·希尔伯特在巴黎国际数学家大会上提出了23个问题。他的

第 16 个问题涉及确定一个自治平面向量场的极限环的数量和位置，对于该平面场， $F$  和  $G$  均为度  $N$  的实多项式。目前，这个问题尚未解决，但是在过去的 100 多年中已经取得了很大的进步。例如，已经表明，这种系统的极限环数是有限的。Ilyashenko(2002)总结了这一结果和许多其他结果。

## 梯度流

如果可以将自主矢量场重写为以下形式，则称为梯度流：

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla V(x), \quad V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

其中的负号按惯例包括在内，因此  $V(x)$  是系统的李雅普诺夫函数。梯度流不可能存在周期性轨道(Guckenheimer 和 Holmes, 1983)。

## 平均非自治矢量场

有时，具有较小参数（包括弱非线性强迫振荡）的非自治矢量场可以用某种形式重写，该形式允许应用平均（随时间变化）方法来了解其动力学。对于本讨论而言，最有用的结果是，所得自治方程式的双曲平衡点的存在暗示了原始非自治系统具有相同的周期轨道（可能是平凡的，即平衡点）的存在。稳定特性作为平衡点 (Guckenheimer 和 Holmes, 1983 年)。

## 查找映射的周期性轨道

根据上面的讨论，映射周期  $k$  周期轨道上的每个点  $p_j$  是映射  $g^k$  的固定点。因此，可以通过求解  $x$  的代数方程  $g^k(x) = x$  来找到周期  $k$  周期轨道上的点。这可以在周期小于  $k$  的周期轨道上定位定点和点：例如，对于任何  $k$ ， $g(x) = x$  的定点也是  $g^k(x) = x$  的解。即使无法明确找到周期轨道上的点，也可以使用分析技术来证明它们必须存在。

## 寻找周期轨道的数值方法

有时可以使用数值方法找到给定矢量场的周期性轨道。如果周期轨道是稳定的，则在周期轨道的吸引盆中具有初始条件的轨迹的正向数值积分将收敛为周期

为  $t \rightarrow \infty$  的周期轨道。即使不稳定,也可以使用其他方法从数值上寻找周期轨道。例如,可以重新构造为自主矢量场找到(稳定或不稳定)周期轨道的问题,以便可以应用牛顿-拉夫森算法的一种变体。一个数值求解  $x$  和  $T$  的  $\phi_T(x) - x = 0$ , 其中  $\phi_T(x)$  是在时间  $T$  之后从点  $x$  开始的轨迹的位置(Parker 和 Chua, 1989)。更稳健的数值方法基于周期解  $x(t) = u(t/T)$  的单位间隔上的边值问题:

$$u' - Tf(u) = 0, u(0) = u(1), \Psi[u] = 0,$$

其中  $\Psi$  是一个相态,在无限多个周期解中选择一个周期解,该周期解对应于相同的周期轨道但具有不同的初始点(Doedel, Keller 和 Kernevez, 1991)。然后通过适当的有限维离散化(例如,通过使用分段多项式函数的正交搭配)来近似该 BVP,并求解  $u$  和  $T$ (的离散化)。

牛顿-拉夫森算法(或其他寻根方法)可以直接应用于在映射的周期性轨道上寻找点:一个人只需要找到感兴趣的周期  $k$  的方程  $g^k(x) - x = 0$  的根即可。

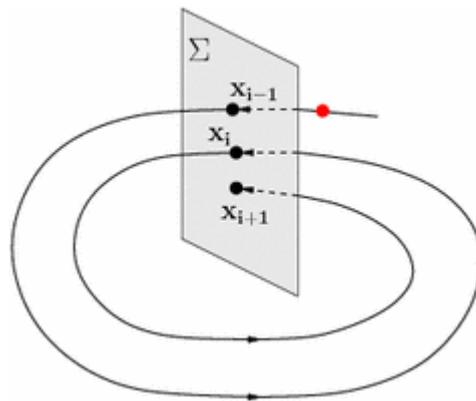


图 3: 矢量场的庞加莱映射。

### 周期轨道的稳定性

可以通过考虑庞加莱图来计算自主矢量场的周期性轨道的稳定性,该图将  $n$  维连续矢量场的流动替换为  $(n-1)$  维映射(Guckenheimer and Holmes, 1983)。具体而言,选择截面  $\Sigma$  的  $(n-1)$  维表面,以使流始终垂直于  $\Sigma$ (见图)。令在解  $x(t)$  的给定方向上具有  $\Sigma$  的连续交点由  $x_i$  表示。庞加莱映射

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

用第  $i$  个交点的  $\Sigma$  确定轨迹的第  $(i+1)$  个交点。自主向量场的周期轨道对应于此

庞加莱图的不动点  $x_f$ ，其特征为  $g(x_f) = x_f$ 。关于  $x_f$  的庞加莱映射的线性化为

$$\xi_{i+1} = Dg(x_f)\xi_i.$$

如果  $Dg$  的所有特征值的模数均小于 1，则  $x_f$ （及对应的周期性轨道）渐近稳定。

如果  $Dg$  的任何特征值具有大于 1 的模量，则  $x_f$ （及相应的周期性轨道）将不稳定。周期轨道的稳定性与横截面  $\Sigma$  无关(Wiggins 2003)。如果  $x_f$  稳定，则它是庞加莱图的吸引子，相应的周期性轨道是矢量场的吸引子。

**例子(续)**(Guckenheimer and Holmes 1983, Strogatz 1994)

对于上面的示例，由  $\theta = 0$  给出的径向线是庞加莱截面，由  $r$  参数化。可以通过显式整合向量字段来找到沿此部分对应的庞加莱映射  $r_{i+1} = g(r_i)$ ：

$$g(r_i) = \left[ 1 + e^{-4\pi\alpha} (r_i^{-2} - 1) \right]^{-1/2},$$

定点  $r_f = 1$  对应于周期性轨道。线性化，我们找到  $g'(r_f) = e^{-4\pi\alpha}$ 。因此，周期轨道对于任何  $\alpha > 0$  都是稳定的，对于任何  $\alpha < 0$  都是不稳定的。

确定周期轨道稳定性的另一种方法是使用 Floquet 理论，该理论涉及围绕周期轨道线性化的时间相关(和  $T$  周期)矢量场。这些线性化方程的解用于定义  $n$  个 Floquet 乘子，这些乘子表征对周期轨道的扰动的增长或衰减。可以看出， $Dg$  的  $(n-1)$  个特征值等于周期轨道的浮球乘数的  $(n-1)$  个；剩余的 Floquet 乘数等于 1，并且对应于沿周期轨道的扰动(Guckenheimer 和 Holmes, 1983 年)。Floquet 乘数或  $Dg$  的特征值的确定通常必须以数字方式进行。

给定如上所述在周期性轨道  $\Gamma$  上的一个点  $x_f$ ，矩阵  $Dg(x_f)$  的特征值可用于将  $(n-1)$  维子空间  $\Sigma$  划分为子空间  $\Sigma^s \oplus \Sigma^c \oplus \Sigma^u$  的直接和，对应分别等于模量小于 1，等于 1 和大于 1 的特征值。如果选择部分  $\Sigma_x$  在不同的基点  $x \in \Gamma$  上连续变化，则相应子空间  $\Sigma_x^s \oplus \Sigma_x^c \oplus \Sigma_x^u$  的级联会形成  $\Gamma$  上的矢量束。 $\Gamma$  的稳定，中心和不稳定流形可以定义为这些向量束上的图。

对于非自治矢量场  $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ ，在某些  $0 < \tau < \infty$  有  $f(x, t) = f(x, t + \tau)$ ，

计算周期轨道的稳定性周期  $T = \frac{pT}{q}$ ，其中  $p$  和  $q$  是整数(请参阅 Arnold 舌头)，

可以通过考虑频闪图来完成，

$$x(t) \rightarrow x\left(t + \frac{pT}{q}\right).$$

稳定性属性来自于该图的特征值，如上所述。

为了确定映射  $x_{i+1} = g(x_i)$  的周期轨道的稳定性，可以利用以下事实：映射  $g$  的周期  $k$  周期轨道上的点  $p_0$  是映射  $g^k$  的固定点。 $g^k$  的这个定点的稳定性与映射  $g$  的周期性轨道的稳定性相同(Guckenheimer 和 Holmes, 1983)。

### 涉及周期轨道的分岔

分岔是动力系统的行为随着系统参数的变化而发生的质的变化。这可能涉及改变周期性轨道的稳定性，和/或创建或破坏一个或多个周期性轨道。因此，分岔分析可以提供另一种(分析或数值)方法来确定周期性轨道的存在与否。

在矢量空间周期维的 1 维分岔中(Guckenheimer 和 Holmes, 1983; Kuznetsov, 1998):

- Andronov-Hopf 分岔，导致出现一个小振幅周期轨道。
- 周期轨道的鞍-结分岔，其中两个周期轨道相互融合并相互抵消。
- 在不变圆的鞍-结分岔(SNIC)，其中周期轨道从同斜轨道出现到鞍形节点平衡(沿着中心流形)。
- 同宿分岔，其中周期性轨道从同宿轨道出现到鞍点，鞍-焦点或焦-焦点平衡。
- 倍周期分岔(也称为翻转分岔)，其中周期  $2T$  的周期轨道出现在周期  $T$  的周期轨道附近。
- Neimark-Sacker 分岔，其中不变的圆环出现在周期轨道附近。
- Blue-Sky Catastrophe，其中大周期的周期性轨道出现在“蓝天之外”(实际上，该轨道与鞍形节点的周期性轨道是同宿的)。

根据分叉参数变化的方向，这些分叉会导致周期性轨道的出现或消失。出现(消失)的轨道可能稳定或不稳定，这取决于分叉是次临界还是超临界。

## 周期性轨道与混沌

随着系统参数的变化, 周期轨道的无限倍周期加倍分支会出现混乱。这被称为费根鲍姆现象或倍周期的混沌途径(Ott, 1993)。而且, 混沌吸引子通常具有嵌入其中的密集的一组不稳定的周期性轨道。这些周期性轨道上的合适平均值可以用来近似描述混沌吸引子的描述量, 例如李雅普诺夫指数和分形维数(Chaos Focus Issue, 1992)。这样的周期性轨道有时可以通过对系统参数的少量操纵来稳定(从而抑制了混沌), 这种方法称为控制混沌(Ott 1993)。

## 参考文献

- 1、Chaos Focus Issue on Periodic Orbit Theory (1992) Chaos 2:1-158.
- 2、E. Doedel, H.B. Keller, and J.-P. Kernevez (1991) International Journal of Bifurcation and Chaos, 1:745-772.
- 3、J. Grasman (1987) Asymptotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications. Springer-Verlag, New York.
- 4、J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, New York
- 5、Yu. Ilyashenko (2002) Centennial history of Hilbert's 16th problem. Bulletin of the American Mathematical Society, 39:301-354
- 6、D.W. Jordan and P. Smith (1977) Nonlinear Ordinary Differential Equations. Clarendon Press, Oxford
- 7、J. Keener and J. Sneyd (1998) Mathematical Physiology. Springer-Verlag, New York
- 8、Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Third Edition. Springer-Verlag, New York.
- 9、E.F. Mishchenko, Yu.S. Kolesov, A.Yu. Kolesov, and N.Kh. Rozov (1994) Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems. Plenum Publishing Corporation, New York
- 10、E. Ott (1993) Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University Press, Cambridge

- 11、 T.S. Parker and L.O. Chua (1989) Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer-Verlag, New York
- 12、 S. Strogatz (1994) Nonlinear Dynamics and Chaos. Perseus, Reading
- 13、 S. Wiggins (2003) Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer-Verlag, New York

### 内部参考文献

- 14、 Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.
- 15、 John W. Milnor (2006) Attractor. Scholarpedia, 1(11):1815.
- 16、 Jan A. Sanders (2006) Averaging. Scholarpedia, 1(11):1760.
- 17、 Edward Ott (2006) Basin of attraction. Scholarpedia, 1(8):1701.
- 18、 Edward Ott (2006) Controlling chaos. Scholarpedia, 1(8):1699.
- 19、 Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown, Jeff Moehlis (2006) Isochron. Scholarpedia, 1(8):1361.
- 20、 Carmen C. Canavier (2006) Phase response curve. Scholarpedia, 1(12):1332.
- 21、 Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.
- 22、 Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

### 其他链接

[Jeff Moehlis' website](#)

[Kresimir Josic' website](#)

[Eric Shea-Brown's website](#)

### 也可看

吸引子, 分叉, 卡纳德斯, 混沌, 动力系统, 平衡, 不动点, 等时, 相位模型, 相位响应曲线, 弛豫振荡器, 准周期, 稳定性, 不稳定周期轨道, 弱耦合振荡器

赞助者: 学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者: 匿名

接受日期: 2006-07-24 16:44:41 GMT