# 平衡点的稳定性

艾曼纽 E．肖诺尔 (俄罗斯科学院生物学数学问题研究所)

本文考虑形式为常微分方程的系统

$$x' = F(x)\,, x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad (1)$$

平衡 $x=c$ ，其稳定性无法由线性系统确定 $y' = Ay\,, A = F'(c)\,.$

## 平衡

考虑具有时间无关解 $x(t)=c$ 的形式的常微分方程组(1)。这种解的轨迹包括一个点，即 c，这个点称为平衡。平衡可以是稳定的或不稳定的。稳定均衡具有实际意义，因为它们对应于某种可观察的机制的存在。这需要进行数学定义，我们将使用 Lyapunov 提供的定义。定义是

- 局部的，即在平衡点 c 的某个邻域中；
- 仅描述解的渐近行为，即 t →+∞时；
- 包含两个概念：中性稳定性(Lyapunov 稳定性)和渐近稳定性；
- 仅考虑系统 (1) 初始条件的扰动。

可以说 Lyapunov 定义仅考虑系统的瞬时或脉冲扰动。

我们对平衡稳定性的直接概念比李雅普诺夫(Lyapunov)定义的概念更为笼统：这样的平衡应该在较小的外部扰动 (“噪声”) 的影响下持续存在，而不仅仅是初始条件的较小扰动。值得注意的是，在较小的持续扰动下，渐近稳定的平衡在这种更一般的意义上也是稳定的 (Massera 1949； Malkin 1958)。

渐近稳定平衡是(1)吸引子的最简单例子。

## 线性化

由于稳定性是在平衡的局部邻域中定义的，因此我们可以线性化系统 (1) 在 c 附近获得

$$y' = Ay\,. \qquad (2)$$

线性化系统 (2) 的渐近动力学取决于雅可比矩阵 $A=F'(c)$ 的特征值 $\lambda$ 。

Eugene M. Izhikevich (2007), Scholarpedia, 2(10):2014. doi:10.4249/scholarpedia.2770

当所有特征值的实部都不为零时，该平衡称为双曲线，如果至少一个特征值的实部为零，则该平衡称为非双曲。

- 如果所有特征值 $\lambda$ 都具有负实部，则 (2) 的所有解都将以指数方式接近零。显然，考虑 y 中的非线性项 (在平衡 c 的某个邻域) 不会改变解的渐近行为，因此线性系统的原点 y = 0，因此非线性系统 (1) 的平衡 c 吸引。
- 如果至少一个特征值具有正实部，则线性化系统的大多数解将呈指数增长，并且显然线性化平衡 y = 0，因此非线性系统(1)的平衡 c 不稳定。

这两个命题都是有效的，但它们的证明并不简单。它是由 A.M. 李雅普诺夫 1892 年推出 (请参阅李雅普诺夫功能)。

如果所有特征值都具有非正实部，但是存在 $\lambda$ 且实部为零，则需要考虑 F(x) 泰勒级数的非线性项。简单的例子表明，非线性项可以保证线性情况下不存在渐近稳定性，或者可以抵消当雅可比矩阵的特征值在虚轴上具有代数多重性时线性系统的弱不稳定性。因此，在这种关键情况下的平衡稳定性是非线性动力学最简单的问题。在下文中，我们将非双曲平衡称为其稳定性由 F(x)的非线性项确定为临界平衡。

## 简化标准型

直观上，有一些变量对应于零和纯虚数特征值，这些变量确定临界平衡的稳定性。中心流形定理允许将整个系统简化为一个较小的子系统，其中包含所有具有在虚轴上 (零或纯虚轴) 的特征值的雅可比矩阵。另外，可以将系统简化为正常形式直至一定顺序。最后，可以通过删除不影响平衡稳定性的项来进一步简化标准型。为简便起见，我们在下面将所得的多项式系统称为标准型。

## 两个主要例子

两个主要的临界情况分别对应于雅可比矩阵的一个零特征值和一对纯虚数特征值。

- 如果 $\lambda$=0 ，则标准型为一维

$$y' = a_2 y^2 .$$

平衡 y = 0 (对应于平衡 x = c)对于任何 $a_2 \neq 0$ 都是不稳定的。 如果 $a_2$=0，则正

规形式为 $y' = a_3 y^3$ 。 显然，平衡 y = 0 在 $a_3 < 0$ 时是稳定的，而在 $a_3 > 0$ 时是不稳定的。

如果 $\lambda = \pm i\omega$ ，则标准型是二维的，方便地用复数形式表示

$$z' = i\omega z + Qz|z|^2 , \tag{3}$$

其中 $z = y_1 + iy_2$ 。注意，(3)没有二次项和三次项。当 $q = \operatorname{Re} Q < 0$ 时，平衡 z = 0 渐近稳定，而当 q > 0 时，平衡 z = 0 不稳定。

在此，我们不考虑从原始系统的右侧找到系数 a 和 Q 的方法(请参阅“鞍结分叉”和“安德罗诺夫-霍普夫分叉”)。这两个最简单的情况具有一般意义：

1) 雅可比矩阵 $A = F'(c)$ 的零特征值的存在导致平衡“具有概率 1”的不稳定性。仅当施加 $\Phi(a) = 0$ 形式的附加条件时，稳定性才可能。此处，$a$ 是点 $x = c$ 之前达到一定阶数的 F(x)的泰勒系数集，这可能不是先验的，而 $\Phi$ 是其中一些系数的多项式。在最简单的一个 $\lambda$=0 的情况下，条件是 $a_2 = 0$

2) 如果所有临界 $\lambda$ 都是纯虚数，则“具有正概率”的渐近稳定性是可能的：如果满足 $\Phi(a) < 0$ 形式的一些条件。条件 $\Phi(a) = 0$ 限制了系统的类别，并可能导致不稳定；见下文。

## 更复杂的例子

假设雅可比矩阵 $A = F'(c)$ 具有两对纯虚数特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ 和 $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$，并且所有其他特征值 (如果有) 均具有负实部。令 $\omega_2 > \omega_1 > 0$ , $\omega_2 \neq 2\omega_1$ ,， 和 $\omega_2 \neq 3\omega_1$ 。然后，标准型是

$$z_1 = i\omega_1 z_1 + z_1(Q_{11}|z_1|^2 + Q_{12}|z_2|^2) ,$$

$$z_2 = i\omega_2 z_2 + z_2(Q_{21}|z_1|^2 + Q_{22}|z_2|^2) .$$

令 $q_{kl} = \operatorname{Re} Q_{kl}$ 。 如果满足以下所有条件，则平衡 z = 0 (对应于系统(1)中的平衡 x = c) 是渐近稳定的：

1. $q_{11} < 0$ ,
2. $q_{22} < 0$ ,

3. 如果 $q_{12}$ 和 $q_{21}$ 是正的，然后 $q_{12}q_{21} - q_{11}q_{22} < 0$ .

如果 $q_{12}$ 或 $q_{21}$ 中至少一个不是正数，则条件 1 和 2 就足够了。

如果以上任何条件包含符号>而不是符号<，则平衡 z = 0 不稳定。当以上至少一个不等式被等式(即具有=符号)替代时，此标准无法说明任何问题。特别地，如果存在谐振关系 $\omega_2=2\omega_1$ ，则标准型具有二次项，并且临界平衡是不稳定的，“概率为 1”，即在 $\Phi \neq 0$ 的条件下。

## 主要例子分类

每个临界情况对应于在 x = c 处施加在 F(x)的泰勒系数上的一定数量的相等条件($\Phi = 0$)。数字 k 称为维数。当人们考虑动力学系统族 x'= F(x，s)且 $s = (s_1, \cdots, s_k)$时，自然存在共同维数 k 的情况(Arnold 1983)。

- 共维数 1 对应于两个最简单和最重要的情况(两个主要关键情况)：一个零特征值和一对纯复特征值。
- 共维 2 包括“更复杂的示例”部分中的示例。
- 此外，如果满足以下条件之一，则共维数 3 包括“更复杂示例”中的平衡：

  谐振条件 $\omega_2=2\omega_1$，或

  条件 $q_{11} = 0$。

请注意，$q_{11}$ 是 F(x)的线性项，二次和三次泰勒系数的相当复杂的函数。也就是说，条件不仅施加在雅可比矩阵上，而且还施加在动力学系统的非线性部分上。

共维数 $k \leq 3$ 的所有情况对于一般系统 (1) 都是已知的。 Arnold 和 Ilyashenko(1988)解释了为什么 k = 3 是一般理论的自然上限，另见 Khazin 和 Shnol(1991)。

具有临界平衡的系统在结构上不稳定：当参数受到干扰时，此类系统的相图在平衡附近会发生质变-分岔。第一个临界情况($\lambda=0$ )对应于鞍-结分岔；第二种情况($\lambda=i\omega$ )对应于 Andronov-Hopf 分岔；维度 2 和 3 的重要情况对应于更复杂的分岔，其中有些未被很好地理解。

## 特殊类别的系统

## 哈密顿系统

在哈密顿系统中，按维数分类是非常不同的：雅可比矩阵的任意数量的纯虚数特征值($\lambda=\pm i\omega$)的存在仍然对应于 k = 0。与频率 $\omega_j$ 之间存在谐振关系相对应的余维数 k > 0 的情况必须分开考虑。而且，由于哈密顿系统的动力学的渐近稳定性是不可能的，因此人们需要提出另一类关于哈密顿系统动力学的问题。然而，由于共振引起的不稳定性可能是令人感兴趣的。

## 对称系统

假设系统 (1) 接受由线性变换组成的有限(或紧致)对称群 G

$$F(gx) = gF(x)$$

对于所有 $g\in G$。 假设平衡 x = c 相对于 G 是不变的，即 gc = c。 如果对称群 G 是非阿贝尔的，那么雅可比矩阵 A 通常具有 $n_* > 1$ 的特征值。 $n_*$ 的可能值取决于与 G 对 $R^n$ 的作用相对应的 G 的不可约表示。 因此，具有对称性的一参数系统族中的共维数 1 临界平衡可具有多个零或纯虚数特征值。 确定这种平衡的稳定性的困难主要取决于 $n_*$ 的值。 已知所有 $n_* = 2$ 的情况和所有 $\lambda = 0$ 的重数为 3 的情况(Shnol 1999)。 $\lambda=\pm i\omega$ 的 $n_* = 3$ 的情况很多，而 $\lambda = 0$ 的 $n_* = 4$ 的情况很多。在所有这些情况下，完全不可能完全了解动力学，但是其中一些可能非常有趣。

## 参考文献


1、V.I.Arnold (1983) Geometric methods in the theory of ordinary differential equations. Springer-Verlag.

2、V.I.Arnold, Yu.S.Ilyashenko (1988) Ordinary differential Equations. In: Encycl. Math Sci., I, 1-148, Springer-Verlag.

3、L.G.Khazin, E.E.Shnol (1991) Stability of Critical Equilibrium States. Manchester University Press.

4、I.G.Malkin (1958) Theory of Stability of Motion. AEC Translation Series,. AEC-t-3352

5、J.L.Massera (1949) On Lyapunov's condition of stability. Annals Math., v.50, No.3

6、E.E.Shnol (1999) The loss of stability of symmetrical equilibrium positions. J.Appl. Math. Mech., Vol.63, No.4, pp.531-536.

## 内部参考文献

7、Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.

8、John W. Milnor (2006) Attractor. Scholarpedia, 1(11):1815.

9、John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517.

10、James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.

11、Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014.

12、James Meiss (2007) Hamiltonian systems. Scholarpedia, 2(8):1943.

13、James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.

14、Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.

15、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

16、James Murdock (2006) Unfoldings. Scholarpedia, 1(12):1904.

## 也可看

Andronov-Hopf 分支，吸引子，分支，中心流形定理，平衡，Hartman-Grobman 定理，Lyapunov 函数，标准型，鞍结分支，稳定性，展开

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich
评论者：匿名
接受日期：2007-03-15 06:57:58 GMT