分岔

约翰・古肯海默博士 (美国纽约州伊萨卡市康奈尔大学)

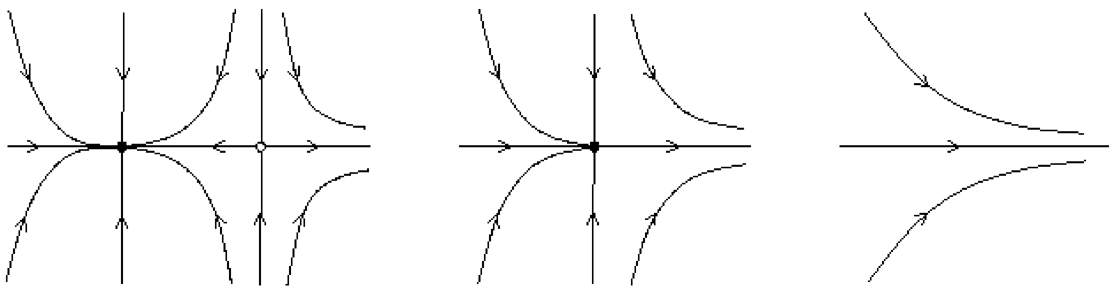
动力系统的**分岔**是由变化的参数所产生的动力学的质变。

定义

考虑一个常微分方程（ODEs）的自治系统

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p \qquad (1)$$

其中 f 是光滑的。如果存在任意接近于 λ_0 的参数值 λ_1，且其动力属性与 λ_0 的拓扑属性在拓扑上不相等，则在 $\lambda=\lambda_0$ 处会出现分岔。例如， f 的平衡点或周期轨道的数量或稳定性可能会随着从 λ_0 到 λ 的扰动而变化。 分岔理论的一个目标是生成参数空间图或分岔图，将 λ 参数空间划分为拓扑等价系统的区域。 分岔发生在不位于这些区域之一内部的点上。



$\beta<0$　　　　$\beta=0$　　　　$\beta>0$

图 1：分岔的示例（系统 $\dot{y}=\beta+y^2$ 和 $\dot{z}=-z$ 中平面上的鞍-结分岔）。

分岔理论

分岔理论为调查一组解中发生的分岔提供了一种策略，通过识别普遍存在的分岔模式来实现。每个分岔类型或奇异性都有一个名称，例如，Andronov-Hopf 分岔。在文献中没有对“分岔”和“分岔类型”（都称为“分岔”）进行区分。

John Guckenheimer (2007), Scholarpedia, 2(6):1517.　　doi:10.4249/scholarpedia.1517

与每种分岔类型相关联的是

- **定义方程**，该方程在一组 $\dot{x} = f(x, \lambda)$ 中定位该类型的分岔
- 给出模型系统分岔类型的**标准型**

非退化性条件的不等式是分岔类型的一部分。 分岔类型及其标准型用作模板，有助于构造参数空间图。分岔理论分析了标准型内的分岔，并研究了具有给定分岔类型的系统内动力学的相似性。该理论使用的系统相似性的“金标准”是拓扑等效性。在某些情况下，分岔理论证明了一组解的结构稳定性。分岔理论的主要目的之一是证明标准型的结构稳定性。但是请注意，有些分岔类型不存在结构稳定的标准型。在分岔理论的背景下，结构稳定性定义的一个重要方面是标准型允许一组解的扰动。例如，已经广泛研究了具有指定对称性的系统的分岔类型（分岔理论等）。

分岔的分类

人们可以将分岔视为一组解内部结构稳定性的失败。对分岔类型进行分类的起点是 Kupka-Smale 定理，该定理列出了矢量场的三个通用属性：

- 双曲平衡点
- 双曲周期轨道
- 平衡点和周期轨道的稳定和不稳定流形的横向相交。

这些 Kupka-Smale 条件失败的不同方式导致不同的分岔类型。分岔理论构造了一个分岔类型的分层图，其中连续层的类型由其定义方程式指定更多失效模式的类型组成。这些层可以通过分岔类型的共维来实现，分岔类型定义为发生该分岔类型的一组解的最小参数数。等价地，该维数是表征分岔相等条件的数量。

余维一分岔包括顶级分岔类型。 Kupka-Smale 属性的单次失效会产生以下类型的余维一分岔：

- 平衡

  鞍-结分岔

  Andronov-Hopf 分岔
- 周期轨道

折叠极限环分岔

翻转分岔（或倍周期分岔）

Neimark-Sacker 分岔（又名 Torus 分岔）

- 整体分岔

平衡的同宿分岔

周期轨道稳定流形和不稳定流形的同宿切线

平衡轨道和周期轨道的异宿分岔

这不是余维一分岔的完整列表。在具有准周期振荡或混沌动力学的系统中可以找到其他类型。此外，上面列表中的子案例涉及诸如 Andronov-Hopf 分岔是次临界还是超临界的问题，以及特征值幅度对同宿分岔的影响。

分岔类型的分类随着其维数增加而变得更加复杂。平衡的两种分岔有五种类型的“局部”余维：

- Bautin 分岔
- Bogdanov-Takens 分岔
- 尖点分岔
- Fold-Hopf 分岔
- Hopf-Hopf 分岔

数值方法

分岔理论的主要用途之一是分析发生在特定动力系统族中的分岔。研究通常由比较模拟结果与标准型或通过求解所研究系统中那些分岔类型的定义方程并计算标准型的系数来确定参数空间图中的分岔类型。一些软件包（AUTO，CONTENT，MATCONT，XPPAUT，PyDSTool）提供了执行后一种类型分析的算法的实现。这些软件包的数字核心包括

- 为分岔类型定义方程的常规实现
- 牛顿法等方程式求解器
- 微分方程的数值延拓方法
- 标准型的计算
- 初值

- 微分方程的边界值求解器

连续方法计算 N + 1 个变量中 N 个方程的正则系统的解的曲线。在上面列出的软件包中以不同程度实现的系统的分岔分析基于以下策略：

- 定位了初始平衡或周期性轨道。
- 当单个活动参数发生变化时，将使用数值连续性跟随该属性轨道。
- 定义一维分岔的方程，可以发现并确定在此解分支上发生的分岔。
- 从一个分维之一的分岔开始，

两个参数被指定为有效，并且使用连续方法来计算余维一分岔的曲线。

  - 定义两个分岔的共维方程，可以检测并定位在此解决方案分支上发生的分岔。
  - 从所找到的余维之一的两个分岔开始，

三个参数被指定为有效，并且使用连续方法来计算两个分岔的余维曲线。

只要有一个规则的定义方程可以增加余维的分岔，就可以继续进行此过程，但是在余维 3 之外几乎不存在这些方程。而且，通常对余维数大于 3 的分岔附近的动力学行为了解甚少，以致于这些点的计算几乎不值得。在许多情况下，分岔分析会确定在 k 维分岔与 k + 1 分岔处相遇的 k 维分岔的其他曲线。可以在这些余维 k 个分岔之一处开始连续方法，以找到具有 k + 1 个活动参数的此类分岔的曲线。基于标准型计算的这种启动技术的示例是切换到 Andronov-Hopf 分岔处的周期性轨道的延续或从 Bogdanov-Takens 分岔处的鞍点同宿分岔曲线的延续。

混沌和准周期系统的分岔理论

分岔理论已经深入研究了涉及混沌和准周期动力学的各种主题。许多理论是在由映射迭代定义的离散动力系统的背景下开发的。上述分岔理论对此设置具有类似的结果。在某些领域，离散系统的分岔理论远比连续时间系统的分岔理论更远。特别是，在二十世纪后半叶发展了广泛而深入的理论来描述一维映射的迭代性质。该理论表征了分岔的普遍序列以及混沌吸引子的存在。该理论中的一部分延续到高维可逆映射的设置，并通过庞加莱映射延伸到连续动力系统。还有一些特定于连续系统的结果，尤其是那些适用于平衡点同宿轨道的结果。该领域的早期结果包括 Lorens 吸引子理论和 Silnikov 对三维系统中以鞍-焦点的同斜轨道的

系统的分析。起源于 KAM（Kolmogorov-Arnold-Moser）理论的方法描述了准周期不变集如何自然地出现在矢量场组中。基于该理论，已经开发出复杂的数值方法来计算矢量场组中具有（准）周期运动的不变环面。

参考文献

1、W. De Melo and S. Van Strien (1993) One Dimensional Dynamics, Springer.

2、J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer

3、Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition.

内部参考文献

4、Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.

5、John W. Milnor (2006) Attractor. Scholarpedia, 1(11):1815.

6、John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2007) Bautin bifurcation. Scholarpedia, 2(5):1853.

7、John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2007) Bogdanov-Takens bifurcation. Scholarpedia, 2(1):1854.

8、Yuri A. Kuznetsov (2007) Conjugate maps. Scholarpedia, 2(12):5420.

9、John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2007) Cusp bifurcation. Scholarpedia, 2(4):1852.

10、James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.

11、Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014.

12、Jeff Moehlis and Edgar Knobloch (2007) Equivariant bifurcation theory. Scholarpedia, 2(9):2511.

13、John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2007) Fold-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 2(10):1855.

14、Lawrence F. Shampine and Skip Thompson (2007) Initial value problems. Scholarpedia, 2(3):2861.

15、Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375.

16、James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.

17、Kendall E. Atkinson (2007) Numerical analysis. Scholarpedia, 2(8):3163.

18、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.

19、Anatoly M. Samoilenko (2007) Quasiperiodic oscillations. Scholarpedia, 2(5):1783.

20、Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.

21、Leonid Pavlovich Shilnikov and Andrey Shilnikov (2007) Shilnikov bifurcation. Scholarpedia, 2(8):1891.

22、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

23、James Murdock (2006) Unfoldings. Scholarpedia, 1(12):1904.

24、Bard Ermentrout (2007) XPPAUT. Scholarpedia, 2(1):1399.

也可看

突变理论，动力系统，标准型，相空间，奇点理论，结构稳定性，展开

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期： 2007-06-14 18:24:27 GMT