

平衡

尤金·M·伊奇凯维奇 (学术百科全书主编, 同行评审开放存取百科全书)

由常微分方程 (ODEs) 自治系统生成的动力系统的平衡 (或平衡点) 是不会随时间而变化的解。例如, 图 1 中的每个静止摆位置都对应于相应的运动方程式的平衡, 一个是稳定的, 另一个是不稳定的。从几何学上讲, 平衡是系统相空间中的点。

更确切地说, ODE

$$x' = f(x)$$

如果 $f(x_e) = 0$, 则具有一个平衡解 $x(t) = x_e$ 。仅在少数特殊情况下, 找到平衡点, 即求解方程 $f(x) = 0$ 才容易。

平衡有时称为定点或稳态。大多数数学家将平衡称为 ODEs 的时间无关解, 将定点称为迭代图 $x(t+1) = f(x(t))$ 的时间无关解。

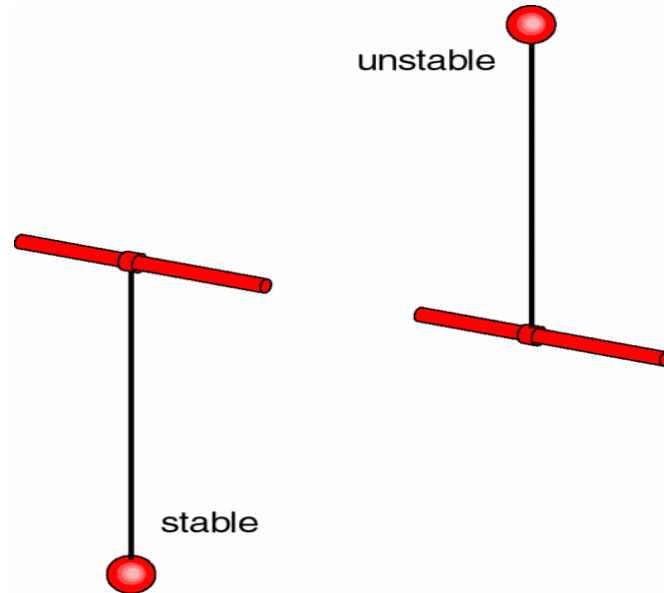


图 1: 稳定和不稳定的平衡点的图示。

雅可比矩阵

光滑 ODEs 的典型平衡点的稳定性取决于雅可比矩阵特征值的实部符号。这些特征值通常被称为“平衡的特征值”。光滑 ODEs 系统的雅可比矩阵是关

于状态变量的右侧偏导数的矩阵

$$J = D_x f = f_x = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中所有导数均在平衡点 $x = x_e$ 处求解。它的特征值决定了平衡的线性稳定性。

如果所有特征值都具有负实部，则平衡是渐近稳定的。如果至少一个特征值具有正实部，则它是不稳定的。

双曲平衡

如果雅可比矩阵的所有特征值都具有非零实部，则称该平衡为双曲型。

双曲平衡是鲁棒的：阶 ε 的小扰动，即 $x' = f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon)$ ，不会在平衡附近定性地改变相图，而只会使与 ε 成比例的小位移。

此外，非线性系统的双曲平衡的局部相图与其线性化等价。该陈述具有数学上精确的形式，称为 Hartman-Grobman 定理。即

$$x' = f(x)$$

在双曲平衡的小邻域内，可以通过同胚性映射（即具有连续逆的连续映射）到线性系统的解上

$$y' = Jy,$$

其中 J 是平衡点的雅可比矩阵。有人说这些系统是局部拓扑共轭的（等价的）。也就是说，在双曲平衡时向线性系统添加非线性项可能会使平衡附近的相图失真，但不会发生质变。

如果雅可比矩阵的至少一个特征值是零或具有零实部，则称该平衡为非双曲型。非双曲式的平衡性不强（即系统在结构上不稳定）：小扰动会导致非双曲平衡的局部分岔，即它会改变稳定性，消失或分裂成许多平衡点。有些人用分岔的

名称来称呼这种平衡，例如，鞍-结平衡。

实际上，人们常常不得不考虑所有特征值具有负或零实部的非双曲平衡。这些平衡有时被认为是至关重要的。它们的稳定性不能通过雅可比矩阵特征值的符号来确定。它取决于 f 的非线性项。

平衡类型

一维空间

考虑一维（标量）动力系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

具有可微（平滑）函数 $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}^1$ 。它的平衡点是函数 $f(x)=0$ ，如图 2 所示。每个平衡点的雅可比矩阵为 $J = f'(x)$ 。当 $f'(x) < 0$ 时，一个平衡点是渐近稳定的；也就是说， f 的斜率为负。当 $f'(x) > 0$ 时不稳定。图中的左两个平衡点是双曲的（ $f'(x) \neq 0$ ），其他两个平衡点是非双曲的，因为斜率（特征值）为零。但是，如果函数在平衡时将符号从正变为负，则一维系统的非双曲平衡是稳定的。

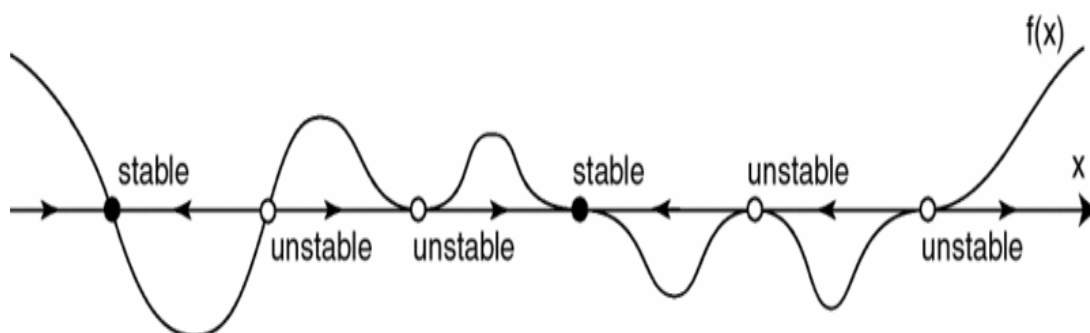


图 2：一维系统 $x' = f(x)$ 的平衡点是 $f(x) = 0$ 的点。

二维空间

考虑右侧平滑的二维（平面）系统

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$x'_2 = f_2(x_1, x_2).$$

雅可比矩阵的形式为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

它有两个特征值，都是实共轭复数。双曲平衡可以是

- 两个特征值均为实数且符号相同时的节点。当特征值为负时，节点是稳定的；当特征值为正时，节点是不稳定的。对于稳定节点，具有最小实部绝对值的特征值称为原则或领先。当特征值不同时，除两个轨道外，所有轨道都趋于沿着前特征向量指向节点（对于不稳定的节点，图片是相反的）；
- 特征值是实数且符号相反时的鞍点。鞍点总是不稳定的。
- 特征值是复共轭时的焦点（有时称为螺旋点）；当特征值具有负实部时，焦点是稳定的；而当特征值具有正实部时，焦点是不稳定的。

让

$$\tau = \text{tr}J = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

为它的迹以及

$$\Delta = \det J = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

是雅可比矩阵的行列式。图 3 总结了平衡的类型。半轴 $\tau=0$, $\Delta > 0$, 并且轴 $\Delta=0$ 分别对应于在 Andronov-Hopf 和鞍-结分岔处产生的非双曲平衡。

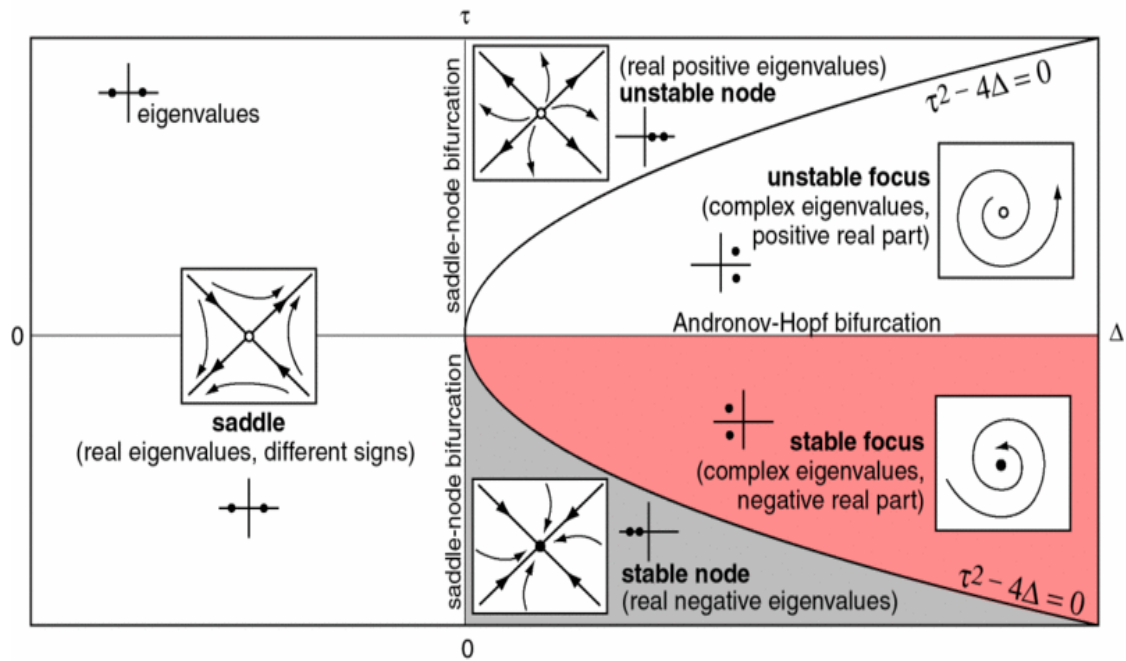


图 3: 根据雅可比矩阵的迹 (τ) 和行列式 (Δ) 对二维动力学系统的平衡进行分类。阴影区域对应于稳定的平衡。(从 Izhikevich 2007 修改)。

三维空间

三维系统的雅可比矩阵具有 3 个特征值，其中一个特征值必须是实数，另外两个特征值可以是实数或复共轭。根据特征值的类型和符号，图 4 中说明了一些有趣的情况。双曲平衡可以是

- 当所有特征值均为实且符号相同时的节点；当特征值为负（正）时，节点是稳定的（不稳定）。
- 当所有特征值均为实且其中至少一个为正或一个为负时，为鞍点，它总是不稳定的。
- 焦点具有一个实际特征值和一对复共轭特征值，并且所有特征值具有相同符号的实部时；当符号为负（正）时，平衡是稳定的（不稳定）。
- 鞍-焦点，当它具有一个实特征值且符号与一对复共轭特征值的实部符号相反时；这种平衡总是不稳定的。

请注意，当时间倒转时（即，当 t 替换为 $-t$ 时）节点和焦点会改变稳定性，而无论时间方向如何，鞍点和鞍-焦点都是不稳定的。

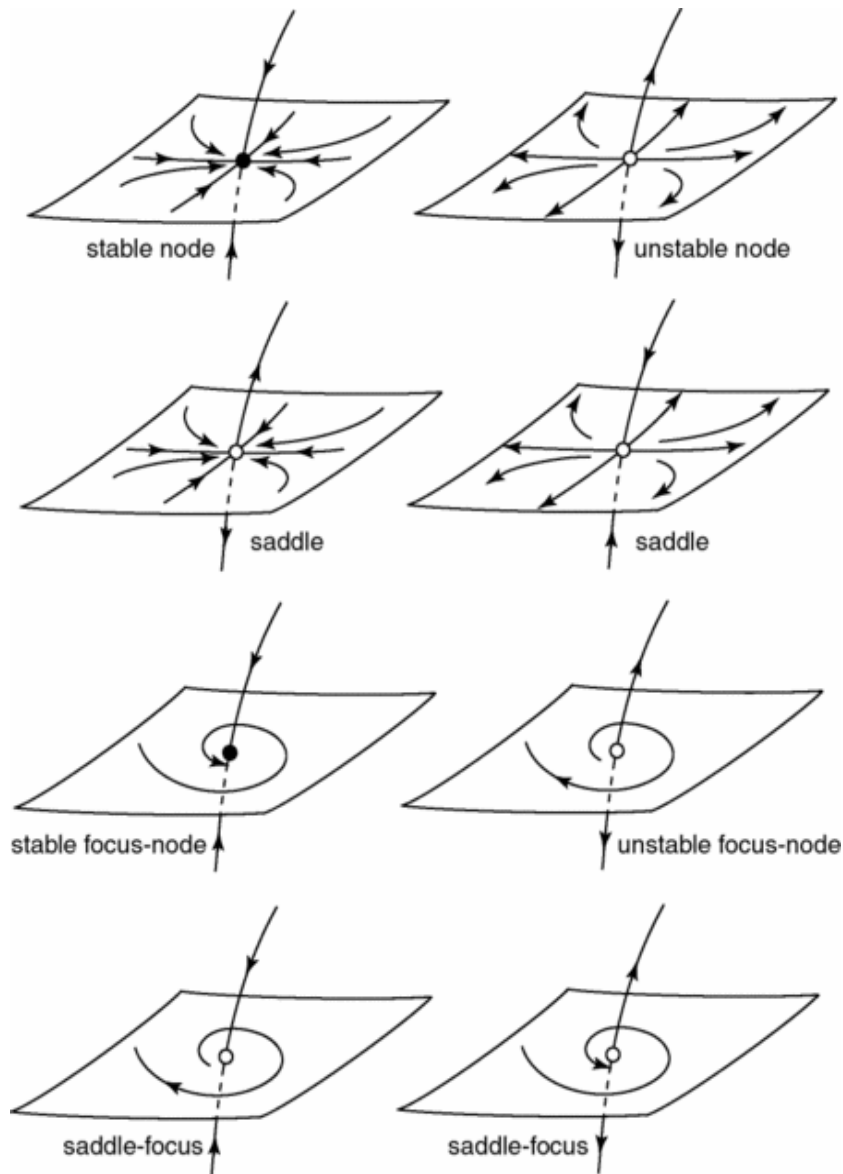


图 4: \mathbb{R}^3 中的平衡示例。

非双曲平衡

非双曲平衡的类型更多，即具有至少一个特征值且实部为零的非双曲平衡，因为此类平衡的小邻域中的相像也取决于 $f(x)$ 的非线性项。这些平衡中的大多数没有名称或以它们所起作用的分岔类型命名。图 5 描绘了三个示例。

当系统在虚轴上只有两个特征值，即一对纯虚特征值时，就会发生中心平衡。如图所示，线性系统的中心周围有同心周期的轨道族。许多仅在二维系统或哈密顿系统的上下文中引用它。如果所有其他特征值均具有负实部，则中心是中性稳定的，但不是渐近稳定的。在 Andronov-Hopf 分岔中也出现一对纯虚数特征值，

但是由于非线性项，这种平衡的邻域看起来像一个焦点。即使其他特征值具有负实部，它也可能是渐近稳定的（超临界 Andronov-Hopf 分岔）或不稳定的（亚临界 Andronov-Hopf 分岔）。

当系统经历鞍-结点分岔时，鞍-结点平衡发生在具有一个零特征值的非线性系统中，其中鞍点和结点彼此靠近，合并为一个平衡（如图所示），然后消失。鞍-结点始终不稳定。

Bogdanov-Takens 平衡发生在具有 2 个零特征值的非线性系统中，通常是在系统经历 Bogdanov-Takens 分岔时。这也是一个不稳定的平衡。

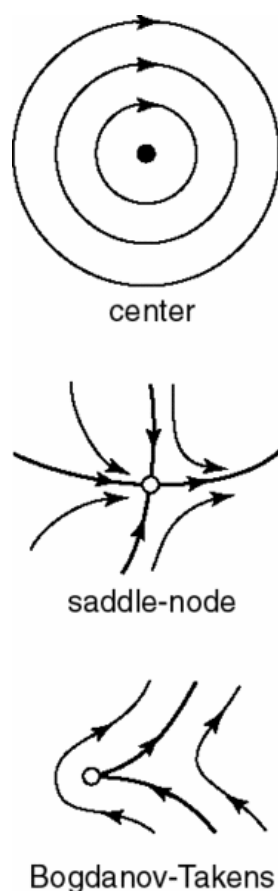


图 5: \mathbb{R}^2 中非双曲平衡的例子。（第一张和第三张图像对应于 Hamiltonian 方程: $x'' = -\omega^2 x$ 和 $x'' = Kx^2$, 其中 $K > 0$ 。

参考文献

- 1、Guckenheimer J. and Holmes P. (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer

- 2、Izhikevich E.M. (2007) *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- 3、Kuznetsov Yu.A. (2004) *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, 3rd edition.

内部参考文献

- 4、Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. *Scholarpedia*, 1(10):1858.
- 5、John Guckenheimer (2007) Bifurcation. *Scholarpedia*, 2(6):1517.
- 6、John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2007) Bogdanov-Takens bifurcation. *Scholarpedia*, 2(1):1854.
- 7、James Meiss (2007) Dynamical systems. *Scholarpedia*, 2(2):1629.
- 8、James Meiss (2007) Hamiltonian systems. *Scholarpedia*, 2(8):1943.
- 9、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. *Scholarpedia*, 1(7):1358.
- 10、Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. *Scholarpedia*, 1(10):1859.
- 11、Leonid Pavlovich Shilnikov and Andrey Shilnikov (2007) Shilnikov bifurcation. *Scholarpedia*, 2(8):1891.
- 12、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. *Scholarpedia*, 1(10):1838.
- 13、Emmanuil E. Shnol (2007) Stability of equilibria. *Scholarpedia*, 2(3):2770.

也可看

[分岔](#), [动力系统](#), [不动点](#), [哈密顿系统](#), [相空间](#), [稳定性](#), [平衡稳定性](#)

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2007-08-27 21:29:56 GMT