

稳定性

菲利普·霍尔姆斯 (美国新泽西州普林斯顿大学)

埃里克·谢伊·布朗 (华盛顿大学)

一个动力系统的轨道的**稳定性**是其是否在附近(即(受扰动的)轨道将保持在该轨道的附近或与之相排斥。渐近稳定性还描述了在长时间极限内附近轨道对该轨道的吸引力。结构稳定性的独特概念已在其他地方进行了处理,并且涉及到所有解族的变化,这些变化是由于对定义动力系统的函数的扰动而引起的。

建立

我们主要考虑自治常微分方程 (ODEs), 以矢量符号表示为:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

我们用初始条件为 $x(0)$ 的 $x(t)$ 表示对 (1) 的解。平衡 x^ϵ (有时称为平衡点或不动点) 是特殊的常数解

$$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^\epsilon$$

其中 $\dot{x}^\epsilon = f(x^\epsilon) = 0$, 这等效于对于所有 $1 \leq j \leq n$ 要求 $f_j(x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, \dots, x_n^\epsilon) = 0$ 。

下面, 我们详细讨论平衡的稳定性, 然后提及对更一般解 $x(t)$ 的稳定性的扩展。我们还为映射提供了一些类似的结果。

定义: 平衡的稳定性

李雅普诺夫稳定性

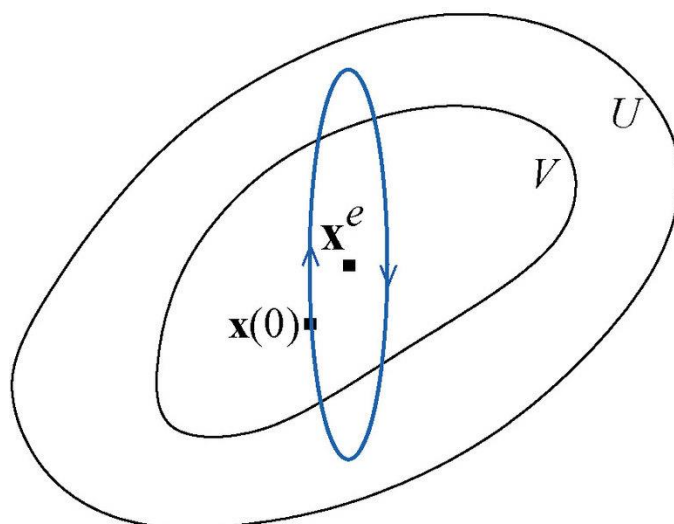


图 1: 稳定性。

如果对于 x^e 的每个邻域 U 都有一个 x^e 的邻域 $V \subseteq U$ ，从而对于所有 $t \geq 0$ ，从 V ($x(0) \in V$) 开始的每个解 $x(t)$ 都保留在 U 中，则 x^e 是一个稳定的平衡。注意， $x(t)$ 不必接近 x^e 。

如果 x^e 不稳定，则不稳定。

渐近稳定性

如果平衡 x^e 是 Lyapunov 稳定，则它是渐近稳定的，并且可以选择 V ，使得对于所有 $x(0) \in V$ ，有 $|x(t) - x^e| \rightarrow 0$ 在 $t \rightarrow \infty$ 。

具有 Lyapunov 稳定但不是渐近稳定的平衡有时称为中性稳定。有关插图，请参见图 1 和图 2。

指数稳定

如果存在 x^e 的邻域 V 和常数 $a > 0$ ，使得对于所有 $x(0) \in V$ 而言有 $|x(t) - x^e| < e^{-at}$ 在 $t \rightarrow \infty$ ，则平衡 x^e 呈指数稳定。指数稳定的平衡点也渐近稳定，因此李雅普诺夫稳定。

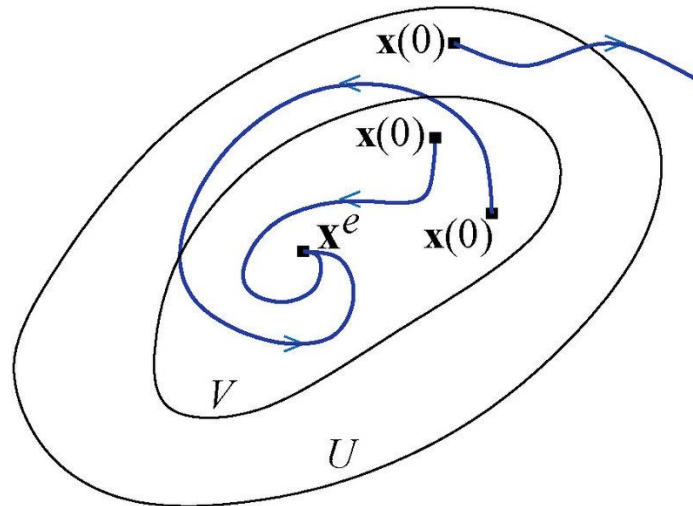


图 2: 渐近稳定性: 下沉 (见下文)。

线性化和平衡稳定性

线性化

假设 $x = x^e$ 是一个平衡, 如果 $x(0) = x^e$, 则 $x \equiv x^e$ 。令 $x(t) = x^e + \xi(t)$, 其中 $\xi(t) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 是一个小扰动

$$|\xi(t)| \ll 1$$

代入 (1) 并将 f 扩展为多变量矢量值的泰勒级数, 得到:

$$\dot{x}^e + \dot{\xi} = f(x^e + \xi) = f(x^e) + Df(x^e)\xi + \mathcal{O}(|\xi|^2). \quad (2)$$

(假设 f 有足够的可微性, 因此带有余数的泰勒定理适用于每个分量。) 在此, $Df(x^e)$ 表示在平衡点 x^e 处求得的偏导数 $[\partial f_i / \partial x_j]$ 的 $n \times n$ 雅可比矩阵。 $\mathcal{O}(|\xi|^2)$ 表示分量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 中的二次项和更高阶项。具体来说, 如果 $g(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^p)$, 则

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{g(\xi)}{|\xi|^p} \leq k < \infty.$$

因此, 对于足够小的 $|\xi|$, 一阶项 $Df(x^e)\xi$ 占主导地位。带入 \dot{x}^e 和 $f(x^e)$ 并

且忽略了小项 $O(|\xi|^2)$ ，我们得到了线性系统：

$$\dot{\xi} = Df(x^e)\xi. \quad (3)$$

这称为 (1) 的线性化。可以通过标准方法解决 (Boyce 和 DiPrima, 1997)。

方程 (3) 的一般解 $\xi(t)$ 。由雅可比矩阵 $Df(x^e)$ 的特征值和特征向量确定。在这里，我们关注的是定性属性，而不是完整的解。特别是，在研究稳定性时，我们想知道解的大小是随着 $t \rightarrow \infty$ 而增长、保持不变还是缩小。通常可以通过检查特征值来回答。

回想一下，如果 λ 是特征向量为 v 的实特征值，则存在以下形式的线性方程的解：

$$\xi(t) = cve^{\lambda t}.$$

如果 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ 是特征向量 $v = u \pm iw$ (其中 u, w 是实数) 的复共轭对

$$\xi_1(t) = e^{\alpha t}(u \cos \beta t - w \sin \beta t)$$

和

$$\xi_2(t) = e^{\alpha t}(u \sin \beta t + w \cos \beta t)$$

是两个线性独立的解。在这两种情况下， λ 的实部 (几乎) 决定了稳定性。由于线性化方程的任何解都可以写为这些形式的项的线性叠加 (除非存在多个特征值)，我们可以推断出

如果 $Df(x^e)$ 的所有特征值均具有严格的负实部，则所有解 $|\xi(t)| \rightarrow 0$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时。

如果 $Df(x^e)$ 的至少一个特征值具有正实部，则存在 $t \rightarrow \infty$ 的 $|\xi(t)| \rightarrow +\infty$ 的解 $\xi(t)$ 。

如果一些复共轭特征值对具有零个虚部和不不同的虚部，那么相应的解就会振荡，并且不会随着 $t \rightarrow \infty$ 而衰减或增长。

注意：线性化的特征值在坐标 (平滑) 变化下得以保留 (Arnold, 1973)。

注意：如果存在多个特征值，则没有足够的线性独立特征向量来跨越 \mathbb{R}^n 。解的行为类似于 $|\xi(t)| \sim t^k e^{\lambda t}$ ，因此，如果 $\lambda < 0$ ，它们仍然会衰减足够长的时间，而

如果 $\lambda > 0$ ，则反之。

注意：项 $t^k e^{\lambda t}$ 表示即使 $\lambda < 0$ ，瞬态增长也会在初始时间发生。在特征值不同的情况下也会发生这种情况。有关更多信息，请参见 (Trefethen 和 Embree, 2005)，但请考虑示例

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -2\xi_1 + \alpha\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_2\end{aligned}$$

对足够大的 $|\alpha|$ 。该系统具有特征值 -1 和 -2。然而，假设 $\xi_1(0)=0$ ， $\xi_2(0)=1$ ，第一坐标 $\xi_1(t)=\alpha(e^{-t}-e^{-2t})$ 最初从零增长到最大值 $\alpha/4$ 。对于足够大的 α ， ξ_1 的增长最初将抵消 $\xi_2=e^{-t}$ 的衰减，因此轨迹在到达 $t \rightarrow \infty$ 之前会暂时移离定点。这也说明在稳定性的定义中需要两个邻域 U 和 V 。

这激发了以下概念：

双曲平衡

定义：如果 $Df(x^\varepsilon)$ 的所有特征值都具有非零实部，则 x^ε 是双曲或非退化平衡。

配备了上面勾勒出的线性分析，并方程 (2) 和 (3) 的其余项被忽略了，通过选择一个足够小的 x^ε (尽可能小)，我们可以根据其线性化来确定双曲平衡的稳定性：

命题：如果 x^ε 是 $\dot{x} = f(x)$ 的平衡并且 Jacobian 矩阵 $Df(x^\varepsilon)$ 的所有特征值都具有严格的负实部，则 x^ε 呈指数 (因而渐近) 稳定。如果至少一个特征值具有严格的正实部，则 x^ε 不稳定。

此外，Hartman-Grobman 定理说，在双曲平衡的小邻域中，非线性系统 (1) 在拓扑上等同于线性化系统 (3)。

我们从流体力学中借用，我们说如果所有附近的解都达到平衡 (例如，所有特征值都具有负实部)，则它是一个下沉；如果所有附近的解都从中退出，那是

一个源头；如果某种方法和某种方式退出了，那是一个鞍点。当平衡被嵌套的封闭轨道包围时，我们称其为中心。

退化平衡

可能希望声称，即使（某些）特征值的实部为零，Lyapunov 稳定性（按照上述定义）仍然成立，但是以下反例表明情况并非如此：

例子 1

考虑

$$\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \neq 0. \quad (4)$$

$x = 0$ 是平衡点， 0 处的线性化是

$$\dot{\xi} = 3\alpha x^2 \Big|_{x=0} \xi = 0, \quad (5)$$

解为 $\xi(t) \equiv \xi(0) = \text{const}$ 。因此 $\xi=0$ 对于方程 (5) Lyapunov 稳定，但不是渐近稳定的。

非线性 ODEs (4) 的精确解可以通过分离变量来找到：

$$\begin{aligned} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^3} &= \int \alpha dt \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{1}{2x(t)^2} - \frac{1}{2x(0)^2} \right) = \alpha t \\ &\Rightarrow \quad x(t) = \frac{x(0)}{\sqrt{1 - 2\alpha x(0)^2 t}}. \end{aligned}$$

因此，我们推断

$$\begin{aligned} |x(t)| &\rightarrow \infty \quad \text{as } t \rightarrow \frac{1}{2\alpha x(0)^2} \quad \text{if } \alpha > 0 \quad (\text{blow up! instability}) \\ \text{but } |x(t)| &\rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad \text{if } \alpha < 0 \quad (\text{asymptotic stability}) \end{aligned}$$

线性化系统 (5) 是退化的，在我们的线性化分析中被忽略的非线性“余项”决定了这种情况下的结果。显然，至少在回顾中，忽略这些术语是危险的，因为尽管它们确实是 $O(\xi^2)$ （实际上是 $O(\xi^3)$ ），但线性 $O(\xi)$ 项完全为零！

例子 2

考虑二维系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \alpha(x^2 + y^2)x, \\ \dot{y} &= -x + \alpha(x^2 + y^2)y.\end{aligned}$$

注意，线性化只是特征值为 $\pm i$ 的谐波振荡器。该系统的平衡 $(x, y) = (0, 0)$ 是稳定的还是不稳定的？为了解决这个问题，可以很方便地将其转换为极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ，从而得到耦合的解系统：

$$\dot{r} = \alpha r^3, \quad \dot{\theta} = -1.$$

第一个方程式如上例所示，因此我们得出结论

$$\alpha > 0 \Rightarrow$$

不稳定； $\alpha = 0 \Rightarrow$ Lyapunov 稳定； $\alpha < 0 \Rightarrow$ 渐近稳定。同样，线性化仅在 $\alpha = 0$ 时才能正确描述稳定性。

在一个或多个特征值的实部为零的退化情况下，我们如何证明稳定性？一种方法要求构造通常称为 Lyapunov 函数的函数，该函数沿解保持不变或减小。对于机械系统，总能量（动能加势能）通常是不错的选择。通过描述李雅普诺夫的第二种方法或直接方法，这可以证明某些情况下的稳定性，甚至渐近稳定性：

定理：假设 $dx/dt = \dot{x} = f(x)$ 在 $x = 0$ 处具有孤立的平衡（不失一般性，可以通过让 $y = x - x^\epsilon$ 将平衡 x^ϵ 移至 0）。如果存在一个微分函数 $V(x)$ ，该函数在 0 的邻域内是正定的（就 $x \neq 0$ 而言， $V(0) = 0$ 且 $V(x) > 0$ ），并且 $dV/dt = \nabla V \cdot f$ 在某些域 $D \ni 0$ 上， $\nabla V \cdot f$ 是负定的，那么 0 是渐近稳定的。如果 dV/dt 为负半定值（即 $dV/dt = 0$ 允许），则 Lyapunov 稳定为 0。

有关证明，请参见，例如（Hirsch, Smale 和 Devaney（2004））。

映射的线性化稳定性

存在类似形式的结果以确保映射的稳定性

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ 或 } \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n). \quad (6)$$

但是在这里，幅度而不是特征值的符号很重要。如果 $x^e = f(x^e)$ ，则解 x^e 称为不动点。

定义： 如果 $Df(x^e)$ 的特征值不具有幅度 1，则 x^e 是映射 $f(x)$ 的双曲或不变性定点。

命题： 如果 x^e 是映射 $f(x)$ 的一个定点，并且 $Df(x^e)$ 的所有特征值的大小都严格小于 1，则 x^e 渐近稳定。如果至少一个特征值的大于 1，则 x^e 不稳定。

示例： Logistic 映射

下面的一维示例对此进行了说明。考虑 Logistic 映射

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

有两个定点

$$x^e = 0$$

并且 $x^e = 1 - 1/\mu$ 。 $x^e = 0$ 处的线性化为

$$\xi_{n+1} = \mu \xi_n$$

可以为下式的解

$$\xi_n = \mu^n \xi_0.$$

显然， $|\xi_n|$ 如果 $|\mu| > 1$ ，则无限制地增长；如果 $|\mu| < 1$ ，则衰减至 0。

同样，我们在 $x^e = 1 - 1/\mu$ 处线性化并获得

$$\xi_{n+1} = (2 - \mu)\xi_n$$

因此，如果 $1 < \mu < 3$ ，则该固定点是渐近稳定的。

一般轨道的稳定性

稳定性的概念可以推广到 ODE 的非恒定轨道（周期性，准周期性或非周期性）。

首先，我们给出一些定义和表示法。给定初始值 $\gamma_t(x) = x(t)$ ，令 $x(0) = x$ 。

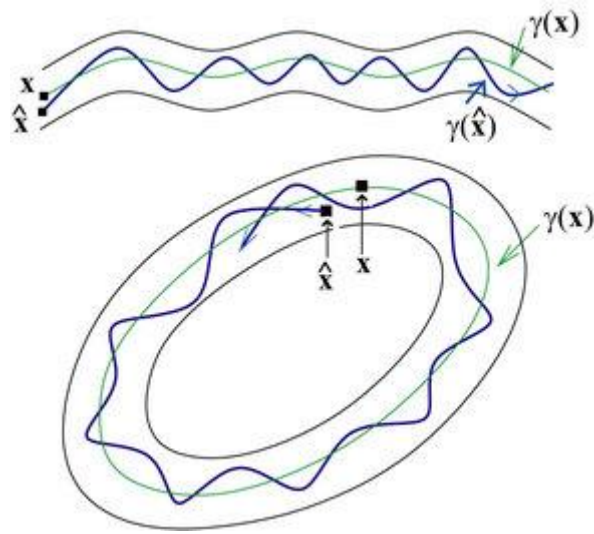


图 3: 轨道稳定性。

然后，（向前）轨道是该轨迹获得的所有值的集合

$$\gamma(\mathbf{x}) = \{\gamma_t(\mathbf{x}) | t \geq 0\}$$

接下来，我们有

定义： 如果存在时间（平滑单调函数） $\hat{t}(t)$ 的重新参数化，则两个轨道 $\gamma(x)$ 和 $\gamma(\hat{x})$ 是闭合的

$$|\gamma_t(\mathbf{x}) - \gamma_{\hat{t}(t)}(\hat{\mathbf{x}})| < \epsilon \text{ for all } t \geq 0.$$

如果从这个意义上说，所有具有附近初始点的轨道都保持接近，则该轨道是轨道稳定的：

定义： 如果对于任意 $\epsilon > 0$ ，存在 x 的邻域 V ，则对于 $\gamma(x)$ 和 $\gamma(\hat{x})$ 都为 ϵ 闭合，则轨道 $\gamma(x)$ 是轨道稳定的。

定义： 如果另外选择 V ，使得对于所有 $\hat{x} \in V$ ，存在一个常数 $\tau(\hat{x})$ ，使得

$$|\gamma_t(\mathbf{x}) - \gamma_{t-\tau(\hat{\mathbf{x}})}(\hat{\mathbf{x}})| \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

则 $\gamma_t(x)$ 是渐近稳定的。

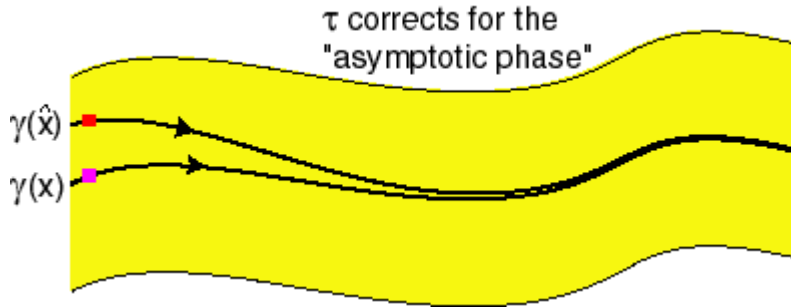


图 4: 渐近轨道稳定性 (黄色表示 $\gamma(x)$ 的 ϵ 邻域)。

参见图 1-图 4, 其示出了轨道 $\gamma(x)$ (及其一部分) 以及 $\gamma(\hat{x})$ 相邻轨道。黑线表示 $\gamma(x)$ 的 ϵ 邻域的边界。

我们注意到, 上面讨论的关于平衡点和不动点的线性化技术可以扩展为适用于周期轨道的渐近稳定性, 如相应文章中所述。

示例: 非线性摆

考虑摆方程

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin(x)\end{aligned}$$

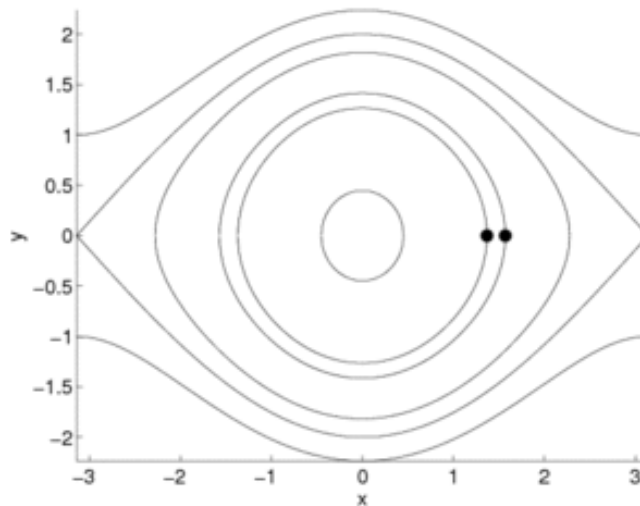


图 5: 非线性摆的轨道稳定性。

轨道位于图 5 所示的能级集上。相邻轨道具有不同的周期。但是, 图中动画的两个轨道是 ϵ -闭合, 因为相应的轨迹在时间重新参数化 (它们的周期将变得相等)

下保持接近。 由于对于任一动画轨迹附近的所有轨道都是如此，因此它们都是轨道稳定的。 实际上，除了鞍点及其连接以外，该系统的所有轨道都是轨道稳定的。

示例：圆环上的线性流

二重瓣上的流

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= 0 \\ \dot{\theta}_2 &= \sin(\theta_1)\end{aligned}$$

类似于上面的钟摆示例：在这里，所有轨道都是轨道稳定的，因为它们的领域在时间重新参数化时呈 ϵ -闭合。

但是，在添加等速第三坐标时

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= 0 \\ \dot{\theta}_2 &= \sin(\theta_1) \\ \dot{\theta}_3 &= 1\end{aligned}$$

情况发生了巨大变化。 考虑两个相邻轨道，其初始值 θ_1 略有不同。 这两个轨道是在不变的 two-tori 是两个线性流，具有固定的不同 θ_1 值。通常，这两个流动是不合理的，因此每个轨道在其两个托轮上都是密集的。 因此，这两个轨道是紧密接近的。 但是，不能重新设置时间参数，以使轨道在上述定义下呈闭合状态，因为流动的斜率不同：请参见图 6。

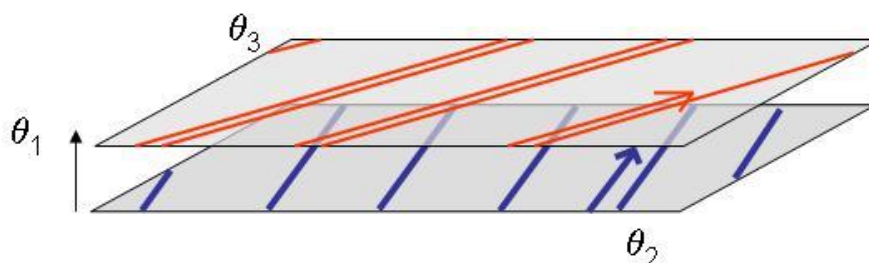


图 6：对于三环示例，其轨道稳定性不足。

示例：两体问题

考虑以下方程，这些方程以极坐标表示为 $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ ，它们描述了两个物体的重力动力学的极限情况：

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= 0 \\ \dot{r}_2 &= 0 \\ \dot{\theta}_1 &= r_1^{-3/2} \\ \dot{\theta}_2 &= r_2^{-3/2}\end{aligned}$$

对于上面的最后一个示例，具有不同初始点的轨道是不变 two-tori 上的线性流，它们通常具有不同的频率比（即不同的斜率）。因此，没有轨道（原点平衡除外）是轨道稳定的。

参考文献

我们感谢两位裁判的认真阅读和建议，特别是感谢她/她对我们对轨道稳定性的定义的更正，并提供了以上示例之一。

- 1、W.E. Boyce and R.C. DiPrima (1997). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, New York.
- 2、M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. Academic Press/Elsevier, San Diego.
- 3、V.I. Arnold (1973). *Ordinary Differential Equations*. MIT Press, Cambridge, MA.
- 4、L.N. Trefethen and M. Embree (2005). *Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

内部参考文献

- 5、John W. Milnor (2006) Attractor. Scholarpedia, 1(11):1815. doi:10.4249/scholarpedia.1815.
- 6、Edward Ott (2006) Basin of attraction. Scholarpedia, 1(8):1701. doi:10.4249/scholarpedia.1701.

7、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit.
Scholarpedia, 1(7):1358. doi:10.4249/scholarpedia.1358.

外部链接

- [Phil Holmes' website](#)
- [Eric Shea-Brown's website](#)

也可看

[吸引子](#), [吸引盆](#), [分叉](#), [混沌](#), [平衡](#), [不动点](#), [周期轨道](#), [不稳定周期轨道](#), [结构稳定性](#)

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2006-10-11 12:47:10 GMT