鞍-结分岔

尤里·A·库兹涅佐夫教授 (荷兰乌得勒支大学数学系)

鞍-结分岔是动力学系统中两个平衡的碰撞和消失。在由自治 ODEs 生成的系统中，当临界**平衡**具有一个零特征值时，这种分岔就会出现。这种现象也称为**折叠**或**极限点**分岔。在文章“**映射中的鞍-结分岔**”中考虑了此分岔的离散版本。

定义

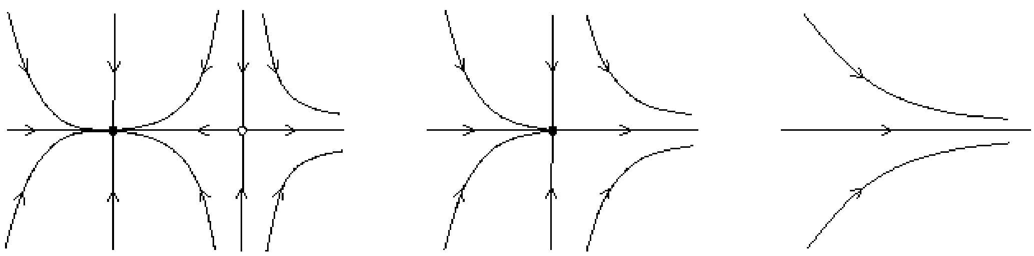
考虑一个常微分方程组（ODEs）的自治系统

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

取决于参数 $\alpha \in R$，其中 f 是平滑的。

- 假设在 $\alpha = 0$ 处，系统的平衡点 $x^0 = 0$。
- 进一步假设其**雅可比矩阵** $A_0 = f_x(0,0)$ 具有一个简单的特征值 $\lambda_1 = 0$。

然后，通常，当 α 穿过 $\alpha = 0$ 时，两个**平衡**发生碰撞，形成临界鞍-结点平衡（图 1 中 $\beta = 0$ 的情况）并消失。该分岔由单个分岔条件 $\lambda_1 = 0$（具有一余维）特征化，一般出现在光滑 ODEs 的一参数族中。 临界平衡 x^0 是方程 $f(x,0) = 0$ 的二重根。



$\beta < 0$　　　　$\beta = 0$　　　　$\beta > 0$

图 1： 系统 $\dot{y} = \beta + y^2$ 和 $\dot{z} = -z$. 中平面上的鞍-结分岔

 doi:10.4249/scholarpedia.1859

一维案例

为了解析地描述此分岔，考虑上述 n = 1 的系统，

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}.$$

如果满足以下非退化条件：

（**SN.1**） $a(0) = \frac{1}{2} f_{xx}(0,0) \neq 0$，

（**SN.2**） $f_{\alpha}(0,0) \neq 0$

则该系统在原点附近与**标准式**是**局部拓扑等价**

$$\dot{y} = \beta + \sigma y^2,$$

其中 $y \in R, \beta \in R$ 及 $\sigma = sign\ a(0) = \pm 1$。

标准型具有两个平衡点 $y^{1,2} = \pm\sqrt{-\sigma\beta}$（一个**稳定**和一个不稳定），当 $\beta < 0$；而当 $\beta > 0$，则没有平衡点。在 $\beta = 0$ 处，存在一个特征值为零的临界平衡 $y^0 = 0$。

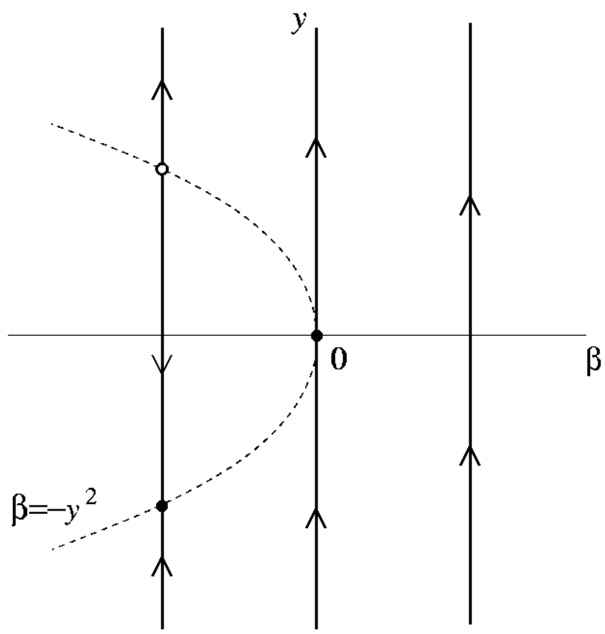


图 2：一维系统 $\dot{y} = \beta + y^2$ 中的鞍-结分岔。

多维案例

 doi:10.4249/scholarpedia.1859

在 $n \ge 2$ 的 n 维情况下，鞍-结分岔处的雅可比矩阵 A_0 具有

- 一个简单的零特征值 $\lambda_1 = 0$，以及
- $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ 的 n_s 个特征值和
- $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$ 的 n_u 个特征值

其中 $n_s + n_u + 1 = n$。 根据**中心流形定理**，在原点附近有一组光滑的一维不变流形 W_α^c。限制在 W_α^c 上的 n 维系统是一维的，因此具有上述范式。

此外，在非退化条件（**SN.1**）和（**SN.2**）下，n 维系统在原点附近的局部拓扑等价于标准鞍点的标准形，即

$$\dot{y} = \beta + \sigma y^2 \,,$$

$$\dot{y}^s = -y^s \,,$$

$$\dot{y}^u = +y^u \,,$$

其中 $y \in R, y^s \in R^{n_s}, y^u \in R^{n_u}$。图 1 显示了当 $n = 2, n_s = 1, n_u = 0$ 且 $\sigma = \pm 1$ 时标准型的**相图**。

二次系数

对于 $n \ge 1$，可以计算非退化条件（**SN.1**）中涉及的二次系数 $a(0)$，如下所示。将 $f(x,0)$ 在 x = 0 处泰勒展开为

$$f(x,0) = A_0 x + \frac{1}{2} B(x,x) + O(\|x\|^3) \,,$$

其中 $B(x,y)$ 是具有分量的双线性函数

$$B_j(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f_j(\xi,0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\right|_{\xi=0} x_k y_l \,,$$

其中 $j = 1,2,\cdots,n$。 令 $q \in R^n$ 为 A_0 的零向量：$A_0 q = 0, \langle q,q \rangle = 1$，其中 $\langle p,q \rangle = p^T q$

是 R^n 中的标准内积。 引入伴随的零向量 $p \in R^n : A_0^T p = 0, \langle p, q \rangle = 1$。 然后（例如，参阅 Kuznetsov (2004))

$$a(0) = \frac{1}{2} \langle p, B(q,q) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \langle p, f(\tau q, 0) \rangle \Big|_{\tau=0} .$$

标准分岔软件（例如 **MATCONT**）可自动计算 $a(0)$。

其他例子

鞍-结分岔也发生在 **PDEs (偏微分方程组)** 和 **DDEs (时滞微分方程组)** 生成的无限维 **ODEs** 中，且中心流形定理也适用。对于具有离散时间的动态系统（迭代图），也会发生鞍-结分岔。

鞍-结同宿分岔

如图 3 所示，平面 ODEs 中鞍-结分岔的一个重要情况是**中心流形**形成了一个同宿环。当鞍-结点消失时，这种**鞍-结同宿分岔**会导致**极限环**的产生。 当参数接近其分岔值时，此循环的周期趋于无穷大。 在 $n \geq 3$ 的 ODEs 中，$n_s n_u > 0$ 的鞍-结点可以同时具有多个同宿轨道。这样的鞍-结点（称为鞍-鞍或希尔尼科夫鞍-结点）的消失会产生无数个鞍点周期轨道。

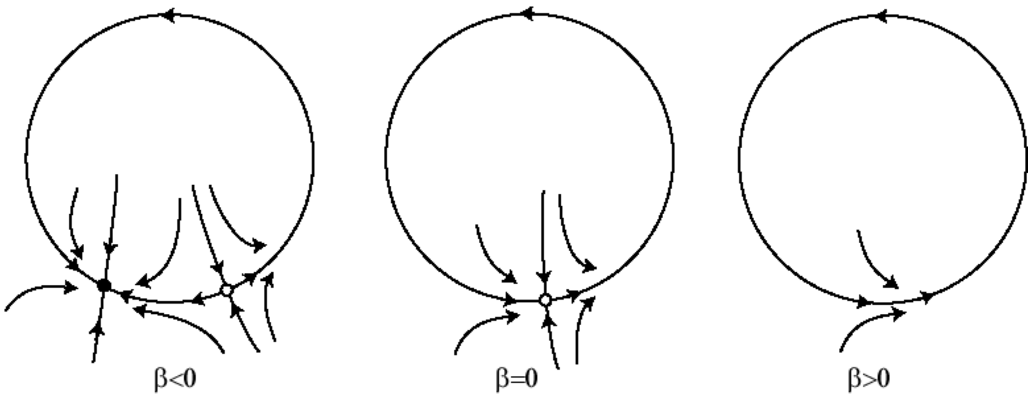


图 3：平面上的鞍-结同斜分岔。

参考文献

1、A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, and A.G. Maier (1971) Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane. Israel Program Sci. Transl.

2、L.P. Shilnikov, On a new type of bifurcation in multidimensional dynamical systems (1969) Sov Math Dokl. 10, 1368-1371.

3、V.I. Arnold (1983) Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Grundlehren Math. Wiss., 250, Springer

4、J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer

5、Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition.

6、S. Newhouse, J. Palis and F. Takens (1983) Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 57, 5-71.

7、L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, and L.O. Chua (2001) Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II, World Scientific.

内部参考文献

8、Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.

9、Jack Carr (2006) Center manifold. Scholarpedia, 1(12):1826.

10、Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375.

11、James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.

12、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.

13、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

外部链接

Yuri A. Kuznetsov's website

也可看

Andronov-Hopf 分支，分支，中心流形定理，动力系统，平衡，MATCONT，常微分方程，映射中的鞍-结分支，鞍-结同宿分支，XPPAUT

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期： 2006-10-02 13:29:53 GMT