

Andronov-Hopf 分岔

尤里·A·库兹涅佐夫教授 (荷兰乌得勒支大学数学系)

Andronov-Hopf 分岔是极限环的诞生,它是由 ODEs 生成的动力系统**中的平衡**引起的,当该**平衡**通过一对纯虚数**特征值**时稳定性发生改变。分岔可以是**超临界**的或是**亚临界**的,分别导致稳定或不稳定的(在不变的二维流形内)**极限环**。

定义

考虑一个常微分方程 (ODEs) 的自治系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

取决于参数 $\alpha \in \mathbb{R}$, 其中 f 是平滑的。

- 假设对于所有足够小的 $|\alpha|$ 系统具有一组平衡 $x^0(\alpha)$ 。
- 进一步假设其雅可比矩阵 $A(\alpha) = f_x(x^0(\alpha), \alpha)$ 具有一对复**特征值**

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$$

当 $\alpha = 0$ 时, 即 $\mu(0) = 0$ 且 $\omega(0) = \omega_0 > 0$ 时, 变为纯虚数。然后, 通常当 α 穿过 $\alpha = 0$ 时, 平衡会改变其稳定性, 并由此产生唯一的极限环。该分岔由单个分岔条件 $\text{Re } \lambda_{1,2} = 0$ (具有一余维) 特征化, 一般出现在光滑 ODEs 的一参数族中。

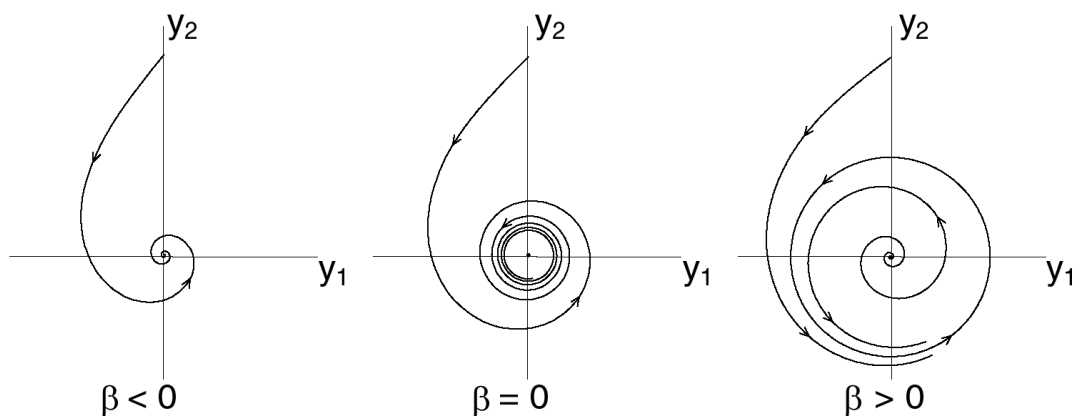


图 1: 平面中的超临界 Andronov-Hopf 分岔。

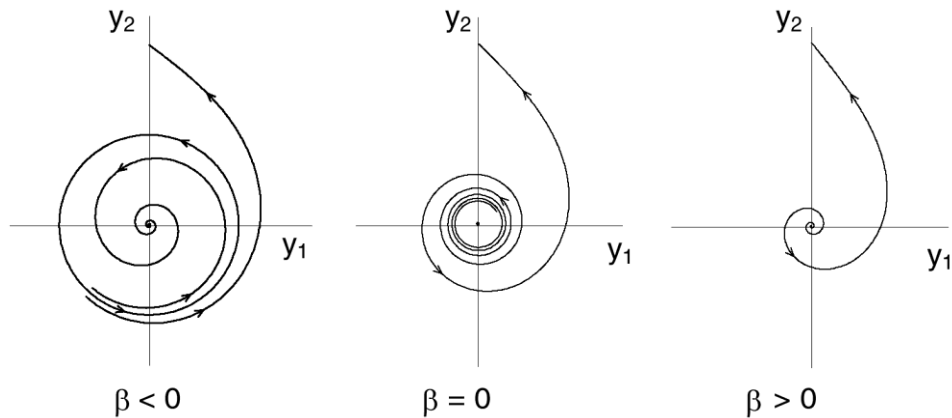


图 2: 平面中的次临界 Andronov-Hopf 分岔。

二维案例

为了解析地描述此分岔，请考虑上述 $n = 2$ 的系统，

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \alpha),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \alpha).$$

如果满足以下非退化条件：

(AH.1) $l_1(0) \neq 0$ ，这里 $l_1(\alpha)$ 第一李雅普诺夫系数（见下文）

(AH.2) $\mu'(0) \neq 0$

则该系统在原点附近与标准式是局部拓扑等价

$$\dot{y}_1 = \beta y_1 - y_2 + \sigma y_1(y_1^2 + y_2^2),$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \beta y_2 + \sigma y_2(y_1^2 + y_2^2),$$

其中 $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\beta \in \mathbb{R}$ 及 $\sigma = \text{sign } l_1(0) = \pm 1$ 。

如果 $\sigma = -1$ ，则标准型在原点具有一个平衡：当 $\beta \leq 0$ 时（在 $\beta = 0$ 时弱）是渐近稳定，而当 $\beta > 0$ 时不稳定。此外，对于 $\beta > 0$ ，存在一个唯一且稳定的圆形极限环，其半径为 $\sqrt{\beta}$ 。这是一个超临界的 Andronov-Hopf 分岔（见图 1）。

如果 $\sigma = +1$ ，则标准型的原点对于 $\beta < 0$ 是渐近稳定的，对于 $\beta \geq 0$ 是不稳定的（在 $\beta = 0$ 时弱），而对于 $\beta < 0$ 则存在唯一且不稳定的极限环。这是次临

界的 Andronov-Hopf 分岔（参见图 2）。

多维案例

在 $n \geq 3$ 的 n 维情况下，雅可比矩阵 A_0 具有

- ◆ 一个简单的纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$ ，以及
- ◆ $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ 的 n_s 个特征值和
- ◆ $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ 的 n_u 个特征值

其中 $n_s + n_u + 2 = n$ 。根据中心流形定理，在原点附近有一组光滑的二维不变流形 W_α^c 。限制在 W_α^c 上的 n 维系统是二维的，因此具有上述范式。

此外，在非退化条件 (AH.1) 和 (AH.2) 下， n 维系统在原点附近的局部拓扑等价于标准鞍点的标准形，即

$$\dot{y}_1 = \beta y_1 - y_2 + \sigma y_1(y_1^2 + y_2^2),$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \beta y_2 + \sigma y_2(y_1^2 + y_2^2),$$

$$\dot{y}^s = -y^s,$$

$$\dot{y}^u = +y^u,$$

其中 $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2, y^s \in \mathbb{R}^{n_s}, y^u \in \mathbb{R}^{n_u}$ 。图 3 显示了当 $n = 3, n_s = 1, n_u = 0$ 且 $\sigma = -1$ 时标准型的相图。

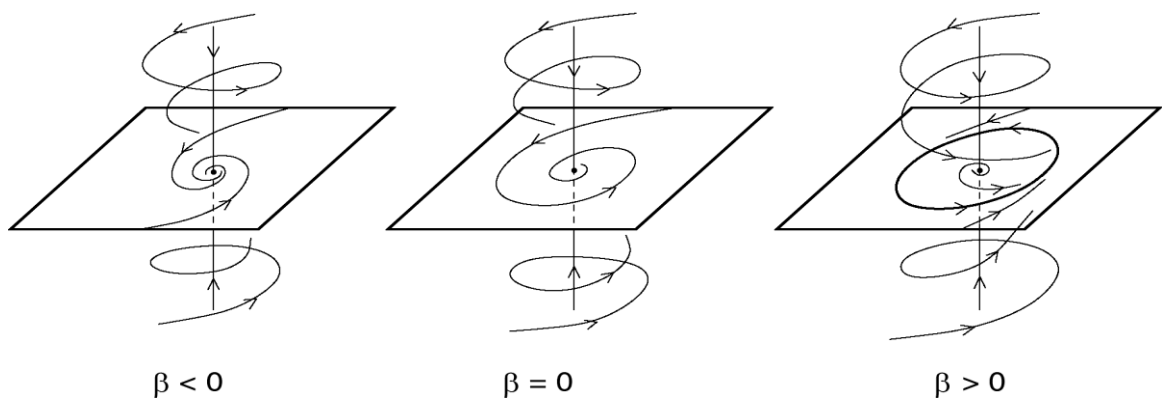


图 3: 3D 空间中的超临界 Hopf 分岔。

第一李雅普诺夫系数

Andronov-Hopf 分岔是次临界还是超临界由 σ 确定，它是动力系统平衡附近的第一李雅普诺夫系数 $l_1(0)$ 的符号。此系数可以在 $\alpha=0$ 下计算。将 $f(x,0)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开为

$$f(x, 0) = A_0 x + \frac{1}{2} B(x, x) + \frac{1}{6} C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

其中 $B(x, y)$ 和 $C(x, y, z)$ 是具有分量的双线性函数

$$B_j(x, y) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_k y_l,$$

$$C_j(x, y, z) = \sum_{k,l,m=1}^n \frac{\partial^3 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \Big|_{\xi=0} x_k y_l z_m,$$

其中 $j=1,2,\dots,n$ 。令 $q \in C^n$ 为 A_0 对应复根 $\pm i\omega_0$ 的复特征向量： $A_0 q = i\omega_0 q$ 。

还引入伴随特征向量 $p \in C^n : A_0^T p = -i\omega_0 p, \langle p, q \rangle = 1$ 。这里 $\langle p, q \rangle = \bar{p}^T q$ 是 C_n 的内积。然后（例如，参阅 Kuznetsov (2004)）

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re} \left[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A_0^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - A_0)^{-1} B(q, q)) \rangle \right]$$

其中 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵。注意， $l_1(0)$ 的值（不是符号）取决于特征向量 q 的缩放比例。归一化 $\langle q, q \rangle = 1$ 是消除这种歧义的选择之一。标准分岔软件（例如 **MATCONT**）可自动计算 $l_1(0)$ 。

对于具有光滑平面的 ODEs

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad f(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(u, v) \\ Q(u, v) \end{pmatrix},$$

设置 $q = p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ 得出公式

$$l_1(0) = \frac{1}{8\omega_0} (P_{uuu} + P_{uvv} + Q_{uuu} + Q_{vvv})$$

$$+ \frac{1}{8\omega_0^2} [P_{uv}(P_{uu} + P_{vv}) - Q_{uv}(Q_{uu} + Q_{vv}) - P_{uu}Q_{uu} + P_{vv}Q_{vv}],$$

其中较低的指数表示在 $x = 0$ 时求的偏导数(参见 Guckenheimer 和 Holmes, 1983)。

一些重要的例子

在一些简单但重要的示例中，可以很容易地找到第一李雅普诺夫系数 (Izhikevich 2007)。这里 $a, b > 0$ 为正参数，所有导数都应在**临界平衡**下求值。

系统	条件	$\text{sign } l_1(0)$
$\dot{x}_1 = F(x_1) - x_2$ $\dot{x}_2 = a(x_1 - b)$	$F' = 0$	$\text{sign } F'''$
$\dot{x}_1 = F(x_1) - x_2$ $\dot{x}_2 = a(bx_1 - x_2)$	$F' = a$ and $b > a$	$\text{sign} [F''' + (F'')^2 / (b - a)]$
$\dot{x}_1 = F(x_1) - x_2$ $\dot{x}_2 = a(G(x_1) - x_2)$	$F' = a$ and $G' > a$	$\text{sign} [F''' + F''(F'' - G'') / (G' - a)]$

其他例子

Andronov-Hopf分岔也发生在 **PDEs** (偏微分方程组) 和 **DDEs** (时滞微分方程组) 生成的无限维 **ODEs** 中，且中心流形定理也适用。当临界不动点具有一对简单的特征值 $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta}$ 时，由迭代映射生成的一般动力系统中会出现 Andronov-Hopf 分岔的类似物—**Neimark-Sacker** 分岔。

参考文献

- 1、 A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, and A.G. Maier (1971) Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane. Israel Program Sci. Transl.
- 2、 V.I. Arnold (1983) Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Grundlehren Math. Wiss., 250, Springer
- 3、 J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer
- 4、 E.M. Izhikevich (2007) Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. The MIT Press.
- 5、 Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition.
- 6、 J. Marsden and M. McCracken (1976) Hopf Bifurcation and its Applications. Springer

内部参考文献

- 7、 Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375.
- 8、 James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.
- 9、 Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.
- 10、 Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia,1(10):1838.

外部链接 [Yuri A. Kuznetsov's website](#)

也可看

[分岔](#), [中心流形定理](#), [动力系统](#), [平衡](#), [MATCONT](#), [常微分方程](#), [XPPAUT](#)

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2006-10-02 12:15:31 GMT