Bogdanov-Takens (BT)分岔

约翰・古肯海默博士 (美国纽约州伊萨卡市康奈尔大学)

尤里・A・库兹涅佐夫教授 (荷兰乌得勒支大学数学系)

Bogdanov-Takens (BT)分岔是两参数族自治ODEs中**平衡点**的分岔，在该分岔上，**临界平衡**有(代数)2 重的零特征值。对于附近的参数值，系统具有两个平衡点（一个鞍点和一个非鞍点），它们通过与**鞍-结分岔**碰撞并消失。 非鞍点平衡经历 **Andronov-Hopf 分岔**，产生**极限循环**。 周期退化为鞍点的同宿轨道，并通过鞍点的同宿分岔消失。

定义

考虑一个常微分方程组（ODEs）的自治系统

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

取决于参数$\alpha \in R$，其中 f 是光滑的。

- 假设在$\alpha = 0$处，系统的平衡点$x^0 = 0$。
- 假设其**雅可比矩阵** $A_0 = f_x(0,0)$具有二重性零特征值$\lambda_{1,2} = 0$

该分岔由两个分岔条件$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$（具有二余维）特征化，一般出现在光滑ODEs的两参数族中。 通常，临界平衡x^0是方程$f(x,0)=0$的二重根，而$\alpha = 0$是原点在如下参数平面中

- **鞍-结分岔**曲线的两个分支，
- 一 **Andronov-Hopf 分岔**曲线，以及
- 鞍点同宿分岔曲线。

此外，这些分岔是非退化的，并且对于参数值足够接近$\alpha = 0$时，在x^0的较小固定邻域中不会发生其他分岔。 在这个领域中，系统最多具有两个平衡和一个**极限环**。

John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2007), Scholarpedia, 2(1):1854. doi:10.4249/scholarpedia.1854

二维案例

为了解析地描述 B-T 分岔，请考虑系统（1）中 n = 2 的情况，

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2 .$$

如果满足以下非退化条件：

（**BT.1**）$a(0)b(0) \neq 0$，其中 $a(0)$ 和 $b(0)$ 是某些二次系数（请参见下文）

（**BT.2**）映射 $(x,\alpha) \mapsto \left(f(x,\alpha), T_r\left(f_x(x,\alpha)\right), \det\left(f_{xx}(x,\alpha)\right)\right)$ 在 $(x,\alpha)=(0,0)$ 处是规则的 ，则该系统在原点附近与**标准式**是**局部拓扑等价**的

$$\dot{y}_1 = y_2 ,$$

$$\dot{y}_2 = \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 + \sigma y_1 y_2 ,$$

其中 $y=(y_1,y_2)^T \in R^2, \beta=(\beta_1,\beta_2)^T \in R^2$ 及 $\sigma = sign\ a(0)b(0) = \pm 1$。

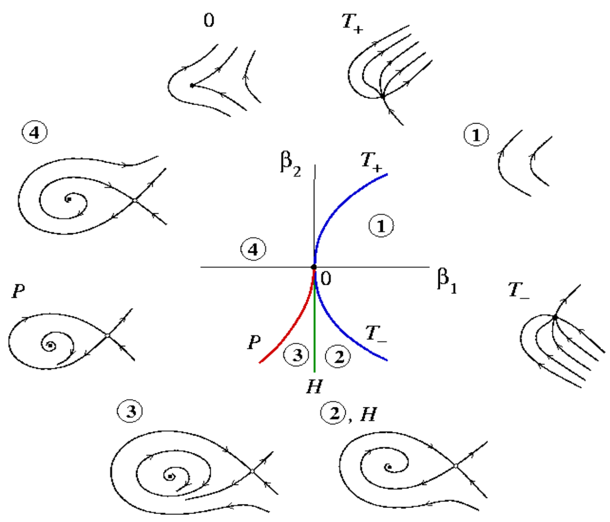

图 1：平面系统 $\dot{y}_1 = y_2$ 和 $\dot{y}_2 = \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 - y_1 y_2$ 中的 B-T 分岔

图 1 给出了 $\sigma = -1$ 的标准型的局部分岔图。点 $\beta = 0$ 分离了**鞍-结分岔**曲线的两个分支：

$$T_+ = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \frac{1}{4}\beta_2^2,\ \beta_2 > 0\}$$

和

$$T_{-}=\{(\beta_1,\beta_2):\beta_1=\frac{1}{4}\beta_2^2,\ \beta_2<0\}.$$

半线

$$H=\{(\beta_1,\beta_2):\beta_1=0,\ \beta_2<0\}$$

对应于产生**稳定**极限环的 Andronov-Hopf 分岔。 该周期存在并保持在直线 H 和平滑曲线之间的双曲线

$$P=\{(\beta_1,\beta_2):\beta_1=-\frac{6}{25}\beta_2^2+O(|\beta_2|^3),\ \beta_2<0\},$$

在该处发生鞍点同宿分岔。当周期接近同宿轨道时，其周期趋于无穷大。

可以通过替换 $t\to -t, \beta\to -\beta$ 将 σ = 1 简化到上述情况之一。这不会影响分岔曲线，但极限循环会变得不稳定。

多维案例

在 $n\geq 2$ 的 n 维情况下，Bogdanov-Takens 分岔处的雅可比矩阵 A_0 具有

- 二重的零特征值 $\lambda_{1,2}=1$，以及
- $\mathrm{Re}\lambda_j<0$ 的 n_s 个特征值和
- $\mathrm{Re}\lambda_j>0$ 的 n_u 个特征值

其中 $n_s+n_u+2=n$。 根据**中心流形定理**，在原点附近有一组光滑的二维不变流形 W_α^c。限制在 W_α^c 上的 n 维系统是二维的，因此具有上述范式。

此外，在非退化条件（**BT.1**）和（**BT.2**）下，n 维系统在原点附近的局部拓扑等价于标准鞍点的标准形，即

$$\dot{y}_1=y_2,$$

$$\dot{y}_2=\beta_1+\beta_2y_1+y_1^2+\sigma y_1y_2,$$

$$\dot{y}^s=-y^s,$$

$$\dot{y}^u=+y^u,$$

其中 $y \in R, y^s \in R^{n_s}, y^u \in R^{n_u}$ 。

二次系数

对于 $n \geq 1$，可以计算非退化条件（**BT.1**）中涉及的二次系数 $a(0)$ 和 $b(0)$。将 $f(x,0)$ 在 x = 0 处泰勒展开为

$$f(x,0) = A_0 x + \frac{1}{2} B(x,x) + O(\|x\|^3)\,,$$

其中 $B(x,y)$ 是具有分量的双线性函数

$$B_j(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f_j(\xi,0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\right|_{\xi=0} x_k y_l\,,$$

其中 $j = 1,2,\cdots,n$ 。令 $q_0, q_1, p_0, p_1 \in R^n$ 是满足以下条件的非零向量：

$$A_0 q = 0,\; A_0 q_1 = q_0,\; A_0^T p_1 = 0,\; A_0^T p_0 = p_1$$

并进行归一化

$$\langle p_0, q_0 \rangle = \langle p_1, q_1 \rangle = 1,\; \langle p_0, q_1 \rangle = \langle p_1, q_0 \rangle = 0\,,$$

其中 $\langle p,q \rangle = p^T q$ 是 R^n 中的标准内积。然后（例如参阅 Kuznetsov (2004))

$$a(0) = \frac{1}{2} \langle p_1, B(q_0,q_0)) \rangle,\;\; b(0) = \langle p_0, B(q_0,q_0)) \rangle + \langle p_1, B(q_0,q_1)) \rangle\,.$$

标准分岔软件（例如 **MATCONT**）可自动计算 $a(0)$ 和 $b(0)$。

其他案例

Bogdanov-Takens 分岔也发生在 **PDEs (偏微分方程组)** 和 **DDEs (时滞微分方程组)** 生成的无限维 **ODEs** 中，且中心流形定理也适用。

参考文献

1、V.I. Arnold (1983) Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Grundlehren Math. Wiss., 250, Springer

2、J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer

3、Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition.

内部参考文献

4、Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.

5、John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517.

6、James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.

7、Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014.

8、Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375.

9、James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.

10、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.

11、Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.

12、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

13、Emmanuil E. Shnol (2007) Stability of equilibria. Scholarpedia, 2(3):2770.

14、Bard Ermentrout (2007) XPPAUT. Scholarpedia, 2(1):1399.

外部链接 Yuri A. Kuznetsov's website

也可看

Andronov-Hopf 分岔，鞍形节点分岔，分岔，中心流形定理，动力系统，平衡，MATCONT，常微分方程，同宿分岔，XPPAUT

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期： 2007-01-09 08:59:55 GMT