

Cusp(尖点)分岔

约翰·古肯海默博士 (美国纽约州伊萨卡市康奈尔大学)

尤里·A·库兹涅佐夫教授 (荷兰乌得勒支大学数学系)

Cusp(尖点)分岔是两参数自治 ODEs 中的平衡分岔，在该 ODEs 中，临界平衡具有一个零特征值，并且鞍-结分岔的二次系数消失。

在尖点分岔点处，鞍-结分岔曲线的两个分支相切相交，形成半圆抛物线。对于附近的参数值，系统可以具有三个平衡点，它们通过鞍-结分岔成对碰撞并消失。尖点分岔意味着存在滞后现象。

定义

考虑一个常微分方程组 (ODEs) 的自治系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

取决于参数 $\alpha \in \mathbb{R}^2$ ，其中 f 是光滑的。

- 假设在 $\alpha = 0$ 处，系统的平衡点 $x^0 = 0$ 。
- 进一步假设其雅可比矩阵 $A_0 = f_x(0,0)$ 具有一个简单的特征值，并且没有其他具有零实部的特征值。
- 最后，假设鞍-结分岔的二次范式系数 $a(0) = 0$ 。

该分岔由两个分岔条件 $\lambda_1 = 0$ 和 $a(0) = 0$ (具有二余维) 特征化，一般出现在光滑 ODEs 的两参数族中。通常，临界平衡 x^0 是方程 $f(x,0) = 0$ 的三重根，而 $\alpha = 0$ 是鞍-结分岔曲线两个分支的参数平面中的原点。跨越每一个分支会导致平衡的两两碰撞和消失。这些分岔是非退化的，且在 x^0 附近不超过三个平衡点。

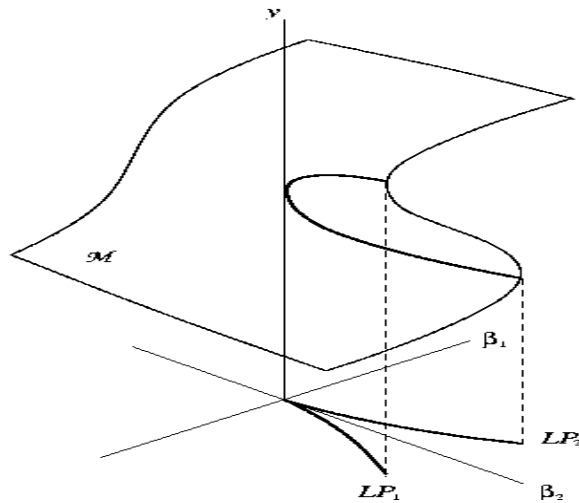


图 1: 尖点分岔附近的平衡流形。

一维例子

为了解析地描述这分岔，考虑上述 $n = 1$ 的系统：

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}.$$

如果满足以下非退化条件：

(CP.1) $c(0) = \frac{1}{6} f_{xxx}(0,0) \neq 0,$

(CP.2) 映射 $(x, \alpha) \mapsto (f(x, \alpha), f_x(x, \alpha), f_{xx}(x, \alpha))$ 在 $(x, \alpha) = (0,0)$ 处是规则的，则该系统在原点附近与标准式是局部拓扑等价的

$$\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y + \sigma y^3,$$

其中 $y \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^2$ 及 $\sigma = \text{sign } c(0) = \pm 1$ 。

图 2 给出了 $\sigma = -1$ 的标准型的局部分岔图。点 $\beta = 0$ 是鞍-结分岔曲线的两个分支的原点：

$$LP_{1,2} = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}} \beta_2^{3/2}, \beta_2 > 0\},$$

这将参数平面分为两个区域。在 LP_1 和 LP_2 之间的楔形内部，存在三个平衡，两个稳定的，一个不稳定的。在楔形外部，有一个单一的稳定平衡。如果我们从楔子内部接近尖点，则所有三个平衡点将合并在一起。

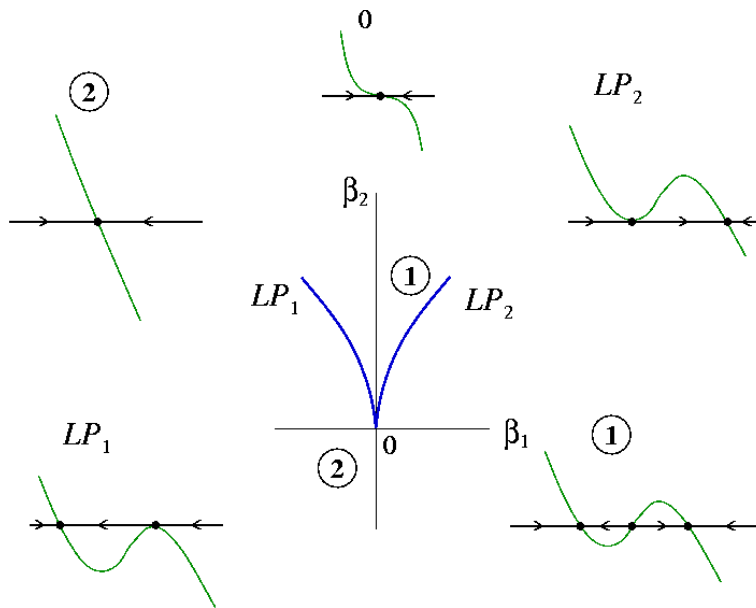


图 2: 一维系统 $\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y - y^3$ 中的尖点分岔。

标准型的平衡流形

$$\mathcal{M} = \{(y, \beta) \in \mathbb{R}^3 : \beta_1 + \beta_2 y - y^3 = 0\}$$

如图 1 所示。该流形在参数平面上的投影沿 $LP_{1,2}$ 具有折叠奇点，而尖峰奇点在原点出现。在这里，存在一个滞后现象：在 LP_1 或 LP_2 处会发生跳到不同稳定平衡的情况，这取决于在平衡 β_1 变化下跟踪的元素最初是属于 \mathcal{M} 的上层还是下层。

可以通过替换 $t \rightarrow -t, \beta \rightarrow -\beta$ 将 $\sigma = 1$ 简化到上述情况之一。

多维例子

在 $n \geq 2$ 的 n 维情况下，尖点分岔处的雅可比矩阵 A_0 具有

- ◆ 一个简单的零特征值 $\lambda = 1$ ，以及
- ◆ $\text{Re} \lambda_j < 0$ 的 n_s 个特征值和
- ◆ $\text{Re} \lambda_j > 0$ 的 n_u 个特征值

其中 $n_s + n_u + 1 = n$ 。根据中心流形定理，在原点附近有一个光滑的一维不变流

形 W_α^c 。限制在 W_α^c 上的 n 维系统是一维的，因此具有上述范式。

此外，在非退化条件 (CP.1) 和 (CP.2) 下， n 维系统在原点附近的局部拓扑等价于标准鞍点的标准形，即

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \beta_1 + \beta_2 y + \sigma y^3, \\ \dot{y}^s &= -y^s, \\ \dot{y}^u &= +y^u,\end{aligned}$$

其中 $y \in \mathbb{R}$, $y^s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $y^u \in \mathbb{R}^{n_u}$ 。图 3 显示了当 $n=2, n_s=1, n_u=0$ 且 $\sigma = \pm 1$ 时标准型的相图。

三次系数

对于 $n \geq 1$ ，可以计算非退化条件 (CP.1) 中涉及的三次系数 $c(0)$ 。将 $f(x, 0)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开为

$$f(x, \alpha) = A_0 x + \frac{1}{2} B(x, x) + \frac{1}{6} C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

其中 $B(x, y)$ 和 $C(x, y, z)$ 是具有分量的多线性函数

$$\begin{aligned}B_j(x, y) &= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_k y_l, \\ C_j(x, y, z) &= \sum_{k,l,m=1}^n \frac{\partial^3 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \Big|_{\xi=0} x_k y_l z_m,\end{aligned}$$

其中 $j=1, 2, \dots, n$ 。令 $q \in \mathbb{R}^n$ 为 A_0 的零向量： $A_0 q = 0, \langle q, q \rangle = 1$ ，其中 $\langle p, q \rangle = p^T q$ 是 \mathbb{R}^n 中的标准内积。引入伴随的零向量 $A_0^T p = 0, \langle p, q \rangle = 1$ 。然后(参阅 Kuznetsov (2004))

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) + 3B(q, h_2) \rangle,$$

其中 $h_2 \in \mathbb{R}^n$ 是非奇异 $(n+1)$ 维线性系统的解。

$$\begin{pmatrix} A_0 & q \\ p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(q, q) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

标准分岔软件（例如 **MATCONT**）可自动计算 $c(0)$ 。

其他例子

尖点分岔也发生在 **PDEs** (偏微分方程组) 和 **DDEs** (时滞微分方程组) 生成的无限维 **ODEs** 中，且中心流形定理也适用。尖点分岔的命名和分析是基于 **奇点理论** 中的尖点，其中尖点出现为 Thom 的七个 **基本灾难** 之一。

参考文献

- 1、V.I. Arnold (1983) Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Grundlehren Math. Wiss., 250, Springer.
- 2、M. Golubitsky and V. Guillemin (1973), Stable Mappings and their Singularities, Springer. doi: 10.1007/978-1-4615-7904-5 .
- 3、J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer.
- 4、Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition. doi:10.1007/978-1-4757-3978-7.
- 5、R. Thom (1975), Structural Stability and Morphogenesis, Benjamin.
- 6、R. Thom (1977), Stabilité structurelle et morphogénèse : essai d'une théorie générale des modèles, Interéditions.

内部参考文献

- 7、John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517. doi: [10.4249/scholarpedia.1517](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1517).
- 8、James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629. doi: [10.4249/scholarpedia.1629](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1629).

- 9、 Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014. doi:
[10.4249/scholarpedia.2014](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.2014).
- 10、 Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT.
Scholarpedia, 1(9):1375. doi:[10.4249/scholarpedia.1375](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1375).
- 11、 James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902. doi:[10.4249/scholarpedia.1902](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1902).
- 12、 Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859. doi:
[10.4249/scholarpedia.1859](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1859).
- 13、 Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):
1838. doi:[10.4249/scholarpedia.1838](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1838).
- 14、 Emmanuil E. Shnol (2007) Stability of equilibria. Scholarpedia, 2(3):2770. doi:
[10.4249/scholarpedia.2770](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.2770).
- 15、 Bard Ermentrout (2007) XPPAUT. Scholarpedia, 2(1):1399. doi:
[10.4249/scholarpedia.1399](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1399).
- 16、 Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):
1838.

外部链接

也可看

[鞍-结分岔](#), [分岔](#), [中心流形定理](#), [动力系统](#), [平衡](#), [MATCONT](#), [常微分方程](#), [XPPAUT](#)

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期： 2007-04-26 11:25:18 GMT