

# Bautin 分岔

约翰·古肯海默博士 (美国纽约州伊萨卡市康奈尔大学)

尤里·A·库兹涅佐夫教授 (荷兰乌得勒支大学数学系)

**Bautin 分岔**是两类参数自治的 ODEs 中一个平衡的分岔,在该条件下临界平衡具有一对纯虚的**特征值**,并且 **Andronov-Hopf 分岔**的第一 Lyapunov 系数消失。这种现象也称为**广义 Hopf (GH) 分岔**。

分岔点将参数平面中的亚临界和超临界 Andronov-Hopf 分岔分开。对于附近的参数值,系统具有两个极限环,它们通过周期性轨道的鞍-结分岔碰撞并消失。

## 定义

考虑一个常微分方程 (ODEs) 的自治系统

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

取决于参数  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 其中  $f$  是平滑的。

- 假设对于所有足够小的  $\|\alpha\|$  系统具有一个平衡  $x = 0$ 。

- 进一步假设其**雅可比矩阵**  $A(\alpha) = f_x(0, \alpha)$  具有一对复**特征值**

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha) \text{ 使得 } \mu(0) = 0 \text{ 及 } \omega(0) = \omega_0 > 0$$

- 最后, 假设 Andronov-Hopf 分岔的临界第一 Lyapunov 系数  $l_1(0) = 0$ 。

该分岔由两个分岔条件  $\text{Re } \lambda_{1,2} = 0$  和  $l_1(0) = 0$  (具有一余维) 特征化, 一般出现在光滑 ODEs 的一参数族中。

通常,  $\alpha = 0$  是如下参数平面的原点

- ◆ Andronov-Hopf 分岔曲线的两个分支, 分别对应于超临界和亚临界情况;
- ◆ 周期轨道的鞍-结分岔的曲线, 其中两个极限环发生碰撞并消失。

此外, 对于参数值足够接近  $\alpha = 0$  的情况, 这些分岔是非退化的, 并且在  $x = 0$  的较小固定邻域中不会发生其他分岔。在这个领域中, 系统最多具有一个平衡和两个极限环。

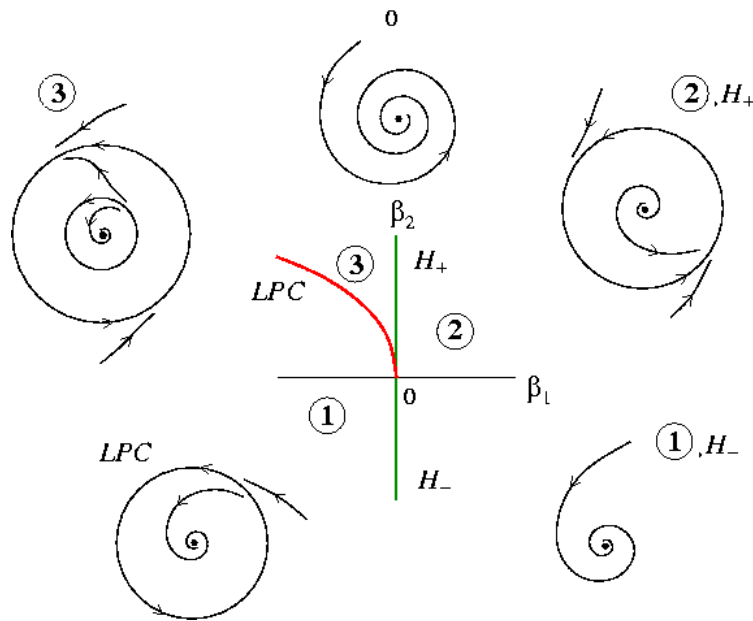


图 1: 平面系统  $\dot{r} = r(\beta_1 + \beta_2 r^2 - r^4)$ ,  $\dot{\varphi} = 1$  中的广义 Hopf (Bautin) 分岔。垂直轴对应于 Andronov-Hopf 分岔 (在  $H_-$  处为超临界, 在  $H_+$  处为亚临界); 曲线 LPC 对应于周期轨道的鞍节点分岔。

## 二维案例

为了解析地描述 Bautin 分岔, 考虑上述  $n = 2$  的系统,

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

如果满足以下非退化条件:

(GH.1)  $l_2(0) \neq 0$ , 这里  $l_2(0)$  第二李雅普诺夫系数 (见下文)

(GH.2) 映射  $\alpha \mapsto (\mu(\alpha), l_1(\alpha))$  在  $\alpha = 0$  处是规则的, 其中  $l_1(\alpha)$  是依赖于第一 Lyapunov 系数的参数 (请参见下文), 则该系统在原点附近与标准型是局部拓扑等价

$$\dot{y}_1 = \beta_1 y_1 - y_2 + \beta_2 y_1 (y_1^2 + y_2^2) + \sigma y_1 (y_1^2 + y_2^2)^2,$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \beta_1 y_2 + \beta_2 y_2 (y_1^2 + y_2^2) + \sigma y_2 (y_1^2 + y_2^2)^2,$$

其中  $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^2$  及  $\sigma = \text{sign } l_2(0) = \pm 1$ 。此标准型在极坐标  $(r, \varphi)$  中特别简单, 其形式为:

$$\dot{r} = r(\beta_1 r + \beta_2 r^2 + \sigma r^4),$$

$$\dot{\varphi} = 1$$

图 1 给出了  $\sigma = -1$  的标准型的局部分岔图。点  $\beta = 0$  分隔了 Andronov-Hopf 分岔曲线的两个分支：半线

$$H_- = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}$$

对应于产生稳定极限循环的超临界分岔，而半线

$$H_+ = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0, \beta_2 > 0\}$$

对应于产生不稳定极限循环的亚临界分岔。 $H_+$  线和如下曲线之间的区域中存在两个双曲极限循环（一个稳定和一个不稳定）

$$LPC = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{1}{4}\beta_2^2, \beta_2 > 0\},$$

在这两个周期之间发生碰撞，并通过周期轨道的鞍节点分岔消失。LPC 的缩写代表“循环极限点”。

沿着曲线 LPC，系统具有唯一的非双曲极限环，其中非平凡的 Floquet 乘数  $+1$ 。

可以通过替换  $t \rightarrow -t, y_2 \rightarrow -y_2, \beta \rightarrow -\beta$ ，将  $\sigma = 1$  减小到上述情况之一。

## 多维案例

在 2 的  $n$  维情况下，在 Bautin 分岔的雅可比矩阵  $A_0 = A(0)$  具有

- ◆ 一对简单的纯虚特征值  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$ ，以及
- ◆  $\text{Re}\lambda_j < 0$  的  $n_s$  个特征值和
- ◆  $\text{Re}\lambda_j > 0$  的  $n_u$  个特征值

其中  $n_s + n_u + 2 = n$ 。根据中心流形定理，在原点附近有一组光滑的二维不变流形  $W_\alpha^c$ 。限制在  $W_\alpha^c$  上的  $n$  维系统是二维的，因此具有上述范式。

此外，在非退化条件 (AH.1) 和 (AH.2) 下， $n$  维系统在原点附近的局部

拓扑等价于标准鞍点的标准形，即

$$\dot{y}_1 = \beta_1 y_1 - y_2 + \beta_2 y_1 (y_1^2 + y_2^2) + \sigma y_1 (y_1^2 + y_2^2)^2,$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \beta_1 y_2 + \beta_2 y_2 (y_1^2 + y_2^2) + \sigma y_2 (y_1^2 + y_2^2)^2,$$

$$\dot{y}^s = -y^s,$$

$$\dot{y}^u = +y^u,$$

其中  $y \in R^2, y^s \in R^{n_s}, y^u \in R^{n_u}$ 。

### 李雅普诺夫系数

对于  $n \geq 2$ ，可以如下计算涉及非退化条件 (GH.1) 和 (GH.2) 的李雅普诺夫系数  $l_1(0)$  和  $l_2(0)$ 。 $f(x,0)$  在  $x=0$  处泰勒展开为

$$f(x, \alpha) = A(\alpha)x + \frac{1}{2} B(x, x, \alpha) + \frac{1}{6} C(x, x, x, \alpha) + O(\|x\|^4),$$

其中  $B(x, y)$  和  $C(x, y, z)$  是具有分量的双线性函数

$$B_j(x, y, \alpha) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 f_j(\xi, \alpha)}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_k y_l,$$

$$C_j(x, y, z, \alpha) = \sum_{k,l,m=1}^n \frac{\partial^3 f_j(\xi, \alpha)}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \Big|_{\xi=0} x_k y_l z_m,$$

其中  $j=1,2,\dots,n$ 。令  $q_\alpha \in C^n$  为  $A(\alpha)$  对应特征值  $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$  的复特征向量： $A(\alpha)q_\alpha = \lambda(\alpha)q_\alpha, \langle q_\alpha, q_\alpha \rangle = 1$ 。还引入伴随特征向量

$p_\alpha \in C^n : A^T(\alpha)p_\alpha = \bar{\lambda}(\alpha)p_\alpha, \langle p_\alpha, q_\alpha \rangle = 1$ 。这里  $\langle p_\alpha, q_\alpha \rangle = \bar{p}_\alpha^T q_\alpha$  是  $C_n$  的内积。然后

$$l_1(\alpha) = \frac{\operatorname{Re} c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)} - \mu(\alpha) \frac{\operatorname{Im} c_1(\alpha)}{\omega^2(\alpha)},$$

其中

$$c_1(\alpha) = \frac{1}{2} \left[ \langle p_\alpha, C(q_\alpha, q_\alpha, \bar{q}_\alpha, \alpha) \rangle + 2 \langle p_\alpha, B(q_\alpha, ((\lambda(\alpha) + \bar{\lambda}(\alpha))I_n - A(\alpha))^{-1} B(q_\alpha, \bar{q}_\alpha, \alpha), \alpha) \rangle + \langle p_\alpha, B(\bar{q}_\alpha, (2\lambda(\alpha)I_n - A(\alpha))^{-1} B(q_\alpha, q_\alpha, \alpha), \alpha) \rangle \right].$$

$I_n$  是单位  $n \times n$  矩阵。

为了计算第二 Lyapunov 系数  $l_2(0)$ ，将  $f(x, 0)$  在  $x=0$  处的泰勒展开式写为

$$f(x, 0) = A_0 x + \frac{1}{2} B_0(x, x) + \frac{1}{6} C_0(x, x, x) + \frac{1}{24} D_0(x, x, x, x) + \frac{1}{120} E_0(x, x, x, x, x) + O(\|x\|^6),$$

其中  $B_0(x, y) = B(x, y, 0)$ ， $C_0(x, y, z) = C(x, y, z, 0)$  以及  $D_0(x, y, z, v)$  和  $E_0(x, y, z, v, w)$  是具有分量的多线性函数

$$D_{0,j}(x, y, z, v) = \sum_{k,l,m,p=1}^n \frac{\partial^4 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \Big|_{\xi=0} x_k y_l z_m v_p,$$

$$C_{0,j}(x, y, z, v, w) = \sum_{k,l,m,p,q=1}^n \frac{\partial^5 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m \partial \xi_p \partial \xi_q} \Big|_{\xi=0} x_k y_l z_m v_p w_q,$$

对于  $j = 1, 2, \dots, n$ 。

然后，临界第二李雅普诺夫系数为

$$l_2(0) = \frac{\operatorname{Re} c_2(0)}{\omega(0)},$$

这里

$$\begin{aligned} c_2(0) = & \frac{1}{12} \langle p_0, E_0(q_0, q_0, q_0, \bar{q}_0, \bar{q}_0) + D_0(q_0, q_0, q_0, \bar{h}_{20}) + 3D_0(q_0, \bar{q}_0, \bar{q}_0, h_{20}) + 6D_0(q_0, q_0, \bar{q}_0, h_{11}) \\ & + C_0(\bar{q}_0, \bar{q}_0, h_{30}) + 3C_0(q_0, q_0, \bar{h}_{21}) + 6C_0(q_0, \bar{q}_0, h_{21}) + 3C_0(q_0, \bar{h}_{20}, h_{20}) \\ & + 6C_0(q_0, h_{11}, h_{11}) + 6C_0(\bar{q}_0, h_{20}, h_{11}) + 2B_0(\bar{q}_0, h_{31}) + 3B_0(q_0, h_{22}) \\ & + B_0(\bar{h}_{20}, h_{30}) + 3B_0(\bar{h}_{21}, h_{20}) + 6B_0(h_{11}, h_{21}) \rangle, \end{aligned}$$

其中

$$h_{20} = (2i\omega_0 I_n - A_0)^{-1} B_0(q_0, q_0),$$

$$h_{11} = -A_0^{-1} B_0(q_0, \bar{q}_0).$$

通过求解非奇异  $(n + 1)$  维复系统来找到复矢量  $h_{21}$

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 I_n - A_0 & q_0 \\ \bar{p}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0(q_0, q_0, \bar{q}_0) + B_0(\bar{q}_0, h_{20}) + 2B_0(q_0, h_{11}) - 2c_1(0)q_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} h_{30} &= (3i\omega_0 I_n - A_0)^{-1} [C_0(q_0, q_0, q_0) + 3B_0(q_0, h_{20})], \\ h_{31} &= (2i\omega_0 I_n - A_0)^{-1} [D_0(q_0, q_0, q_0, \bar{q}_0) + 3C_0(q_0, q_0, h_{11}) + 3C_0(q_0, \bar{q}_0, h_{20}) \\ &\quad + 3B_0(h_{20}, h_{11}) + B_0(\bar{q}_0, h_{30}) + 3B_0(q_0, h_{21}) - 6c_1(0)h_{20}], \\ h_{22} &= -A_0^{-1} [D_0(q_0, q_0, \bar{q}_0, \bar{q}_0) + 4C_0(q_0, \bar{q}_0, h_{11}) + C_0(\bar{q}_0, \bar{q}_0, h_{20}) + C_0(q_0, q_0, \bar{h}_{20}) \\ &\quad + 2B_0(h_{11}, h_{11}) + 2B_0(q_0, \bar{h}_{21}) + 2B_0(\bar{q}_0, h_{21}) + B_0(\bar{h}_{20}, h_{20})]. \end{aligned}$$

标准分岔软件（例如 **MATCONT**）可自动计算  $l_2(0)$ 。

## 其他例子

Bautin 分岔也发生在 **PDEs**（偏微分方程组）和 **DDEs**（时滞微分方程组）生成的无限维 **ODEs** 中，且中心流形定理也适用。

## 参考文献

- 1、V.I. Arnold (1983) Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Grundlehren Math. Wiss., 250, Springer
- 2、J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer
- 3、Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition.

## 内部参考文献

- 4、Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.
- 5、John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517.
- 6、James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.
- 7、Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014.

- 8、Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375.
- 9、James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.
- 10、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.
- 11、Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.
- 12、Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.
- 13、Emmanuil E. Shnol (2007) Stability of equilibria. Scholarpedia, 2(3):2770.
- 14、Bard Ermentrout (2007) XPPAUT. Scholarpedia, 2(1):1399.

外部链接 [Yuri A. Kuznetsov's website](#)

也可看

[Andronov-Hopf 分岔](#), [鞍-结分岔](#), [周期轨道的鞍-结分岔](#), [分岔](#), [中心流形定理](#), [动力系统](#), [平衡](#), [MATCONT](#), [常微分方程](#), [XPPAUT](#)

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2007-04-26 11:49:51 GMT