Fold-Hopf 分岔

约翰·古肯海默博士 (美国纽约州伊萨卡市康奈尔大学)

尤里·A·库兹涅佐夫教授 (荷兰乌得勒支大学数学系)

Fold-Hopf 分岔是两组参数自治 ODEs 中**平衡点**的分岔，在该分岔处**临界平衡**具有零特征值和一对纯虚数特征值。这种现象也称为 **zero-Hopf (ZH)分岔，鞍-结 Hopf 分岔或 Gavrilov-Guckenheimer 分岔**。

参数平面中的分岔点位于**鞍-结分岔**和 **Andronov-Hopf 分岔**的曲线的切线相交处。根据系统的不同，可能会从 ZH 点发出**圆环分岔**的分支。在这种情况下，附近参数值也会发生其他分岔，包括不变圆环周期轨道的鞍节点分岔，**环面破坏**，以及希尔勒科夫同宿轨道与连接平衡点的鞍-焦点和异宿轨道的分岔。

因此，这种分岔可能意味着出现了“混沌”。

定义

假设一个自治系统的常微分方程是光滑的，方程如下：

$$\dot{x} \to f(x,\alpha), x \in R^n \qquad (1)$$

其中参数$\alpha \in R^2$。

- 假如系统在$\alpha = 0$处具有**平衡**$x = 0$。
- 则假设其**雅可比矩阵**$A = f_x(0,0)$具有一个零特征值$\lambda_1 = 0$和一对纯虚数特征值和$\lambda_{2,3} = \pm i\omega(0)$，其中$\omega(0) > 0$

此维度的分岔其特征条件为$\lambda_1 = 0$，$Re\ \ \lambda_{2,3} = 0$，且出现在具有两参数族的开放集合的光滑常微分方程中。通常，α=0 位于如下曲线的切线相交处

- **鞍-结分岔**曲线；
- 具有两参数族的 **Andronov-Hopf 分岔**。

Brusselator **反应扩散系统**在一个空间维度上提供了特定系统中这种分岔的早期示例（Guckenheimer，1980；Wittenberg 和 Holmes，1997）。

对于参数值足够接近α=0 的 x = 0 的小固定邻域，系统最多具有两个平衡点，该平衡点可通过**鞍-结分岔**碰撞或消失；或经历 **Andronov-Hopf 分岔**，从而

John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2007), Scholarpedia, 2(10):1855

doi:10.4249/scholarpedia.1855

产生**极限环**。一余维分岔的附加曲线在参数平面α=0中的处累积。一个分岔出现的在哪个维数主要取决于 $f(x,0)$ 的二次泰勒系数。 最复杂的情况与 Hopf 分岔所产生的极限环的**环形分岔**（**Neimark-Sacker 分岔**）的分支有关。圆环分岔的曲线横向与鞍点和 Andronov-Hopf 分岔曲线相交。环面分差产生不变的二维环面，即“鞍-结点与 Andronov-Hopf 分岔的相互作用可能导致环面”。不变的圆环通过“异宿破坏”或“爆发”消失。在前一种情况下，连接两个平衡点的同宿轨道和异宿轨道出现并消失（Champneys 和 Kirk 2004），而在后一种情况下，圆环在 $x=0$ 的任意小的固定邻域的边界上撞击。圆环上的**动力学**可以是周期性的或**准周期性**的，并且圆环在消失之前可能会失去其平滑度。完整的分岔方案是未知的。

三维案例

为了解析地分析 Fold-Hopf 分岔，当上面的映射中$n=3$时，

$$\dot{x} \to f(x,\alpha), x \in R^3$$

如果满足以下**非退化**条件：

- （**ZH.1**） $B(0)C(0)E(0)\neq 0$ ；
- （**ZH.2**）对于映射 $(x,\alpha)\mapsto(f(x,\alpha))$，$Tr(f_x(x,\alpha)),\det(f_x(x,\alpha))$ 在 $(x,\alpha)=(0,0)$ 是规则的，则该系统在原点附近的局部轨道上平滑地等效于复杂标准型：

$$\dot{\xi}=\beta_1+\xi^2+s|\zeta|^2+O(\|(\xi,\zeta)\|^4),$$

$$\dot{\zeta}=(\beta_2+i\omega)\zeta+(\theta(\beta)+i\theta_1(\beta))\xi\zeta+\xi^2\zeta+O(\|(\xi,\zeta)\|^4),$$

其中$\xi\in R,\varsigma\in C,\beta\in R^2$ 及

$$s=\operatorname{sign} B(0)C(0)=\pm 1,\ \theta(0)=\frac{\operatorname{Re} H_{110}}{B(0)}.$$

当$E(0)<0$，轨道等价包括时间倒转。

$B(0)$，$C(0)$，$E(0)$和 H_{110} 的公式如下。 该标准型在实圆柱坐标$(\rho,\ \varphi,\ \xi)$ 中

doi:10.4249/scholarpedia.1855

特别简单，其形式为：

$$\dot{\xi}=\beta_1+\xi^2+s\rho^2+O((\xi^2+\rho^2)^2),$$

$$\dot{\rho}=\rho(\beta_2+\theta(\beta)\xi+\xi^2)+O((\xi^2+\rho^2)^2),$$

$$\dot{\varphi}=\omega+\theta_1(\beta)\xi+O(\xi^2+\rho^2),$$

在这里φ 的O-项是2π-周期。

通常，标准形式的分岔图取决于O项，尽管某些功能由下面的“截断标准型”所决定：

$$\dot{\xi}=\beta_1+\xi^2+s\rho^2,$$

$$\dot{\rho}=\rho(\beta_2+\theta(\beta)\xi+\xi^2),$$

$$\dot{\varphi}=\omega+\theta_1(\beta)\xi,$$

前两个方程与描述单调旋转的第三个方程无关。平面系统的局部分岔图

$$\dot{\xi}=\beta_1+\xi^2+s\rho^2,$$

$$\dot{\rho}=\rho(\beta_2+\theta(\beta)\xi+\xi^2)$$

这里

- （**ZH.3**）$\theta(0)\neq 0$，在 Kuznetsov（2004）和 Guckenheimer 和 Holmes（1983）中有介绍。这里应区分四种情况：
- s = 1，$\theta(0)>0$ （亚临界 Hopf 分岔且无环面）；
- s ＝ -1，$\theta(0)<0$（亚临界 Hopf 分岔且无环面）；
- s ＝ 1，$\theta(0)<0$（亚临界和超临界 Hopf 分岔且有环面 “异宿破坏”）；
- s ＝ -1，$\theta(0)>0$（亚临界和超临 Hopf 分岔且有环面“爆炸”）。

分岔的标准型不是唯一的。 在目前的情况下，环面的**稳定性**由正态的三次项决定，在 Guckenheimer 和 Holmes（1983）中讨论了不同选择的等效性。环面的异宿破坏是否产生混沌不变集，并不是由有限度正规形式展开的性质决定的。

多维案例

在$n \geq 3$的n维实例中，Fold -Hopf 分岔中雅可比矩阵$A = f_x(0,0)$一般有

- 一个零特征值$\lambda_1 = 0$和一对纯虚数特征值和$\lambda_{2,3} = \pm i\omega$，以及
- 当$|\lambda_j| < 1$时，有特征值n_s
- 当$|\lambda_j| > 1$时，有特征值n_u，且$n_s + n_u + 3 = n$。

根据**中心流形定理**，原点处存在一组平滑的四维不变流形W_α^c。受限于W_α^c的n维映射是四维的，因此具有上述标准型。

标准型系数

在$n \geq 3$时，可以计算非退化条件（**ZH.1**）和（**ZH.3**）中涉及的标准型系数。将$f(x,0)$在$x = 0$处进行泰勒展开，如下所示：

$$f(x,\alpha) = Ax + \frac{1}{2}B(x,x) + \frac{1}{6}C(x,x,x) + O(\|x\|^4),$$

其中$B(x,y)$和$C(x,y,z)$为多线性函数，如下所示：

$$B_j(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f_j(\xi,0)}{\partial\xi_k \partial\xi_l}\right|_{\xi=0} x_k y_l \ ,$$

$$C_j(x,y,z) = \sum_{k,l,m=1}^{n} \left.\frac{\partial^3 f_j(\xi,0)}{\partial\xi_k \partial\xi_l \partial\xi_m}\right|_{\xi=0} x_k y_l z_m \ ,$$

其中，$j = 1,2,\dots,n$。

引入两个特征向量：$q_0 \in R^n$ 和 $q_1 \in C^n$，$Aq_0 = 0, Aq_1 = i\omega q_1$，以及两个伴随特征向量：$p_0 \in R^n$ 和 $p_1 \in C^n$，$A^T p_0 = 0, A^T p_1 = -i\omega p_1$。标准化有$\langle p_0, q_0\rangle = \langle p_1, q_1\rangle = 1$（符号⟨v，w⟩表示两个向量的内积。）

计算得到：

$$G_{200} = \frac{1}{2}\langle p_0, B(q_0,q_0)\rangle,\ H_{110} = \langle p_1, B(q_0,q_1)\rangle,\ G_{011} = \langle p_0, B(q_1,\bar{q}_1)\rangle,$$

及

$$G_{300} = \frac{1}{6} \langle p_0, C(q_0,q_0,q_0) + 3B(q_0,h_{200}) \rangle ,$$

$$G_{111} = \langle p_0, C(q_0,q_1,\bar{q}_1) + B(q_1,\bar{h}_{110}) + B(\bar{q}_1,h_{110}) + B(q_0,h_{011}) \rangle ,$$

$$H_{210} = \frac{1}{2} \langle p_1, C(q_0,q_0,q_1) + 2B(q_0,h_{110}) + B(q_1,h_{200}) \rangle ,$$

$$H_{021} = \frac{1}{2} \langle p_1, C(q_1,q_1,\bar{q}_1) + 2B(q_1,h_{011}) + B(\bar{q}_1,h_{020}) \rangle ,$$

其中

$$h_{020} = (2i\omega I_n - A)^{-1} B(q_1,q_1) ,$$

而向量 h200、h011 和 h110 是以下非奇异系统的解

$$\begin{pmatrix} A & q_0 \\ p_0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{200} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(q_0,q_0) + \langle p_0, B(q_0,q_0) \rangle q_0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} A & q_0 \\ p_0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{011} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(q_1,\bar{q}_1) + \langle p_0, B(q_1,\bar{q}_1) \rangle q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} i\omega I_n - A & q_1 \\ \bar{p}_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{110} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(q_0,q_1) - \langle p_1, B(q_0,q_1) \rangle q_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

最后，$B(0) = G_{200}$，$\mathrm{C}(0) = G_{011}$ ，而

$$E(0) = \mathrm{Re}\left[H_{210}(0) + H_{110}(0) \left(\frac{\mathrm{Re}\, H_{021}(0)}{G_{011}(0)} - \frac{3G_{300}(0)}{2G_{200}(0)} + \frac{G_{111}(0)}{2G_{011}(0)} \right) - \frac{H_{021}(0) G_{200}(0)}{G_{011}(0)} \right] .$$

分岔软件 **MATCONT** 自动计算 s，$\theta(0)$，$E(0)$ 。

其他情况

Fold-Hopf 分岔也发生在 **PDEs (偏微分方程组)** 和 **DDEs (时滞微分方程组)** 生成的无限维 **ODEs** 中，且中心流形定理也适用。

John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2007), Scholarpedia, 2(10):1855
doi:10.4249/scholarpedia.1855

参考文献

1. A.R. Champneys and V. Kirk (2004) The entwined wiggling of homoclinic curves emerging from saddle-node/Hopf instabilities. Phys. D 195, 77-105.
2. J. Guckenheimer (1980) On a codimension two bifurcation, Lecture Notes in Math. 898, 99-142.
3. J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer.
4. Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer, 3rd edition.
5. Ralf W. Wittenberg and Philip Holmes (1997), The limited effectiveness of normal forms: A critical review and extension of local bifurcation studies of the Brusselator PDE, Phys. D. 100, 1-40.

内部文献

6. Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.
7. John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517.
8. James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.
9. Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014.
10. Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375.
11. James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.
12. Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.
13. Anatoly M. Samoilenko (2007) Quasiperiodic oscillations. Scholarpedia, 2(5):1783.
14. Gregoire Nicolis and Anne De Wit (2007) Reaction-diffusion systems. Scholarpedia, 2(9):1475.
15. Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.
16. Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.
17. Emmanuil E. Shnol (2007) Stability of equilibria. Scholarpedia, 2(3):2770.
18. Valentin S.Afraimovich (2007) Torus breakdown. Scholarpedia, 2(10):1933.
19. Bard Ermentrout (2007) XPPAUT. Scholarpedia, 2(1):1399.

外部链接

也可看

Andronov-Hopf分岔，鞍-结分岔，周期轨道的鞍-结分岔，分岔，中心流形定理，动力系统，平衡，MATCONT，常微分方程，XPPAUT

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich
评论者：匿名
接受日期： 2007-10-14 20:00:15 GMT