Hopf-Hopf 分岔

约翰·古肯海默博士 (美国纽约州伊萨卡市康奈尔大学)

尤里·A·库兹涅佐夫教授 (荷兰乌得勒支大学数学系)

Hopf-Hopf 分岔是在具有两参数族的常微分方程在**平衡点**的**分岔**，方程在该**临界平衡点**具有两对纯虚数**特征值**。这种现象也称为 double-Hopf 分岔。

参数平面中的分岔点位于 **Andronov-Hopf 分岔**的两条曲线的横向交点处。通常，**圆环分岔**的两个分支从 Hopf-Hopf（HH）点发出。在不同的系统中近似的参数值也会发生其他分岔，包括聚焦平衡的 Shilnikov 同宿轨道分岔，以及连接鞍形**极限环**和平衡点的非斜向结构的分岔。

定义

假设一个自治系统的常微分方程是光滑的，方程如下：

$$\dot{x} \rightarrow f(x,\alpha), x \in R^n \qquad (1)$$

其中参数$\alpha \in R^2$。

- 假如系统在$\alpha = 0$处具有平衡$x = 0$。
- 则假设其雅可比矩阵$A = f_x(0,0)$具有两对纯虚数特征值$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1(0)$和$\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2(0)$，其中$\omega_1(0) > 0$，$\omega_2(0) > 0$。

此维度的分岔其特征条件为$Re\ \ \lambda_{1,2} = 0$，$Re\ \ \lambda_{3,4} = 0$，且出现在具有两参数族的开放集合的光滑常微分方程中。在此分岔中：

- 两个 Andronov-Hopf 分岔曲线在$\alpha = 0$处相交；
- 两个圆环分岔曲线由$\alpha = 0$处发出。

当参数值足够接近$\alpha = 0$时，在$x = 0$的一个小的固定邻域中，该系统最多具有一个平衡，该平衡可以经历 Andronov-Hopf 分叉，从而产生极限环。这些极限环的每个圆环分岔会生成一个具有周期或准周期轨道的不变二维圆环。2D 不变圆环会伴有类似于 3D 圆环的不变集，该不变集可以通过“异质性破坏”或“爆炸”消失。在“异质性破坏”中，存在连接平衡和两个周期的各种同斜轨道和异斜轨道，而在“爆炸”中，不变集到达$x = 0$的任意小的固定邻域的边界。完整的

John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2008), Scholarpedia, 3(8):1856. doi:10.4249/scholarpedia.1856

分岔情况是未知的。

四维案例

为了解析地分析 Hopf-Hopf 分岔，当上面的映射中$n = 4$时，

$$\dot{x} \to f(x, \alpha), x \in R^4 \tag{2}$$

如果满足以下**非退化**条件：

- 当整数$k, l > 0$，且$k + l \leq 3$时，$k\omega_1(0) \neq l\omega_2(0)$；
- 对于映射$\alpha \to (Re\ \ \lambda_1(\alpha), Re\ \ \lambda_2(\alpha))$，$\lambda_{1,3}(\alpha)$是临界平衡参数$||\alpha||$的延续性特征值，此时$\lambda_1(0) = i\omega_1(0)$和$\lambda_3(0) = i\omega_2(0)$在$\alpha = 0$处是周期性的。

那么该系统在原点附近就与 Poincare 标准形式在局部轨道上平滑等效。Poincare 标准形式如下所示：

$$\dot{r}_1 = r_1(\beta_1 + a_{11}(\beta)r_1^2 + a_{12}(\beta)r_2^2) + O((r_1^2 + r_2^2)^2) ,$$

$$\dot{r}_2 = r_2(\beta_2 + a_{21}(\beta)r_1^2 + a_{22}(\beta)r_2^2) + O((r_1^2 + r_2^2)^3) ,$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(\beta) + O(r_1^2 + r_2^2) ,$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2(\beta) + O(r_1^2 + r_2^2) ,$$

其中，$a_{11}(\beta) = \mathrm{Re}\, G_{2100}(\beta),\ a_{12}(\beta) = \mathrm{Re}\, G_{1011}(\beta),\ a_{21}(\beta) = \mathrm{Re}\, H_{1110}(\beta),\ a_{22}(\beta) = \mathrm{Re}\, H_{0021}(\beta),$
且φ_k中的O项周期为2π。

通常，标准形式的分岔图取决于O项，尽管O项某些功能由下面的标准形式所决定：

$$\dot{r}_1 = r_1(\beta_1 + a_{11}(\beta)r_1^2 + a_{12}(\beta)r_2^2) ,$$

$$\dot{r}_2 = r_2(\beta_2 + a_{21}(\beta)r_1^2 + a_{22}(\beta)r_2^2) ,$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(\beta) ,$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2(\beta) ,$$

其中前两个方程与后两个特定的单调循环无关。在 Guckenheimer 和 Holmes（1983，Sec.7.5）的平面振幅系统中可以找到满足某些额外通用性条件的局部分岔图。平面振幅系统如下：

$$\begin{cases} \dot{r}_1 &= r_1(\beta_1 + a_{11}(\beta)r_1^2 + a_{12}(\beta)r_2^2), \\ \dot{r}_2 &= r_2(\beta_2 + a_{21}(\beta)r_1^2 + a_{22}(\beta)r_2^2), \end{cases} \tag{3}$$

这里应区分两种情况：

- $a_{11}(0)a_{22}(0) > 0$，（“简单情况”，振幅系统中没有周期轨道）；
- $a_{11}(0)a_{22}(0) < 0$，（“复杂情况”，振幅系统中可能有周期性轨道和异宿轨道）。

每种情况均取决于

$$\theta = \frac{a_{12}(0)}{a_{22}(0)}\ ,\ \ \delta = \frac{a_{21}(0)}{a_{11}(0)}$$

平面振幅系统（3）的平衡点$(r_1, r_2) = (0,0)$与 4D 系统（2）相对应；非平衡$(r_1, 0)$和$(0, r_2)$对应于极限环；而正平衡$(r_1, r_2); r_1 > 0, r_2 > 0$，对应于不变的 2D 平面圆环（tori）；振幅系统的极限周期对应于不变的 3D 平面圆环。振幅系统中在$(r_1, 0)$或$(0, r_2)$情况下，外形与 Andronov-Hopf 分岔相同。在“困难情况”下，振幅系统中的异宿分岔（3）表示不变的 3D 环面的消失以及在完整的 4D 系统中的混沌不变集的出现（2）。附近存在着各种连接平衡和鞍极限环的同宿和异宿轨道（Guckenheimer 和 Holmes，1983；Broer，1983；Broer 和 Vegter，1984）。

多维案例

在$n \geq 4$的n维实例中，Hopf-Hopf 分岔中雅可比矩阵$A = f_x(0,0)$一般有

- 两对纯虚数特征值$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1(0)$，$\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2(0)$。
- 当$|\lambda_j| < 1$时，有特征值n_s
- 当$|\lambda_j| > 1$时，有特征值n_u，且$n_s + n_u + 4 = n$。

根据中心流形定理，原点处存在一族平滑的四维不变流形W_α^c。受限于W_α^c的n维映射是四维的，因此具有上述标准形式，也可以与（Broer，2003 年）比较。

三次标准型系数

标准形式的三次系数，在$n \geq 4$时可以按照如下方式计算（Kuznetsov，1999）。

将$f(x,0)$在$x=0$处进行泰勒展开，如下所示：

$$f(x,\alpha) = Ax + \frac{1}{2}B(x,x) + \frac{1}{6}C(x,x,x) + O(||x||^4)$$

其中$B(x,y)$和$C(x,y,z)$为多线性函数，如下所示：

$$B_j(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f_j(\xi,0)}{\partial\xi_k \partial\xi_l}\right|_{\xi=0} x_k y_l$$

$$C_j(x,y,z) = \sum_{k,l,m=1}^{n} \left.\frac{\partial^3 f_j(\xi,0)}{\partial\xi_k \partial\xi_l \partial\xi_m}\right|_{\xi=0} x_k y_l z_m$$

其中，$j = 1,2,\ldots,n$。

两个复合特征向量$q_{1,2} \in C^n$，

$$Aq_1 = i\omega_1(0)q_1，Aq_2 = i\omega_2(0)q_2$$

两个伴随特征向量$p_{1,2} \in C^n$，

$$A^T p_1 = -i\omega_1(0)p_1，A^T p_2 = -i\omega_2(0)p_1$$

令$\langle p_1, q_1\rangle = \langle p_2, q_2\rangle = 1$。（$\langle v, w\rangle = v^{-T}w$表示两个复数向量的内积。）计算过程如下：

$$h_{1100} = -A^{-1}B(q_1, \bar{q}_1),$$

$$h_{2000} = (2i\omega_1(0)I_n - A)^{-1}B(q_1, q_1), ,$$

$$h_{1010} = [i(\omega_1(0) + \omega_2(0))I_n - A]^{-1}B(q_1, q_2),$$

$$h_{1001} = [i(\omega_1(0) - \omega_2(0))I_n - A]^{-1}B(q_1, \bar{q}_2), ,$$

$$h_{0020} = (2i\omega_2(0)I_n - A)^{-1}B(q_2, q_2), ,$$

$$h_{0011} = -A^{-1}B(q_2, \bar{q}_2)$$

计算结果如下：

John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2008), Scholarpedia, 3(8):1856. doi:10.4249/scholarpedia.1856

$$G_{2100}(0)=\frac{1}{2}\left\langle p_1, C(q_1,q_1,\bar{q}_1)+B(h_{2000},\bar{q}_1)+2B(h_{1100},q_1)\right\rangle,$$

$$G_{1011}(0)=\left\langle p_1, C(q_1,q_2,\bar{q}_2)+B(h_{1010},\bar{q}_2)+B(h_{1001},q_2)+B(h_{0011},q_1)\right\rangle,$$

$$H_{1110}(0)=\left\langle p_2, C(q_1,\bar{q}_1,q_2)+B(h_{1100},q_2)+B(h_{1010},\bar{q}_1)+B(\bar{h}_{1001},q_1)\right\rangle,$$

$$H_{0021}(0)=\frac{1}{2}\left\langle p_2, C(q_2,q_2,\bar{q}_2)+B(h_{0020},\bar{q}_2)+2B(h_{0011},q_2)\right\rangle.$$

分岔软件 MATCONT 自动计算这些系数。

Gavrilov 标准形式

要分析 2D 圆环面内的分岔，必须将四阶和五阶项归一化。生成的标准形式不是唯一的。如果满足以下条件：

- $(\boldsymbol{HH.0})$ $k\omega_1(0)\neq l\omega_2(0)$，其中$k$，$l$为正整数，且$k+l\leq 5$；
- $(\boldsymbol{HH.1})$ $Re\ \ G_{2100}(0)\neq 0$；
- $(\boldsymbol{HH.2})$ $Re\ \ G_{1011}(0)\neq 0$；
- $(\boldsymbol{HH.3})$ $Re\ \ H_{1110}(0)\neq 0$；
- $(\boldsymbol{HH.4})$ $Re\ \ H_{0021}(0)\neq 0$；
- $(\boldsymbol{HH.5})$ 映射$\alpha\to(Re\ \ \lambda_1(\alpha), Re\ \ \lambda_3(\alpha))$在$\alpha=0$点为规律映射，其中$\lambda_{1,3}(\alpha)$是$||\alpha||$临界平衡的延续的特征值，满足$\lambda_1(0)=i\omega_1(0)$，$\lambda_3(0)=i\omega_2(0)$。

则系统（2）在原点附近在局部轨道上平滑地等效于复杂标准形式（Gavrilov，1980）

$$\dot{v}_1=(\beta_1+i\omega_1(\beta))v_1+P_{11}(\beta)v_1|v_1|^2+P_{12}(\beta)v_1|v_2|^2+iR_1(\beta)v_1|v_1|^4+S_1(\beta)v_1|v_2|^4+O(\|(v_1,\bar{v}_1,v_2,\bar{v}_2)\|^6),$$

$$\dot{v}_2=(\beta_2+i\omega_2(\beta))v_2+P_{21}(\beta)v_2|v_1|^2+P_{22}(\beta)v_2|v_2|^2+S_2(\beta)v_2|v_1|^4+iR_2(\beta)v_2|v_2|^4+O(\|(v_1,\bar{v}_1,v_2,\bar{v}_2)\|^6),$$

其中，v_1，$v_2\in C$，$\beta\in R^2$。$S_k(\beta)$和$P_{jk}(\beta)$是复值平滑函数，使得

$$\mathrm{Re}\ P_{11}(0)=\mathrm{Re}\ G_{2100}(0),\quad \mathrm{Re}\ P_{12}(0)=\mathrm{Re}\ G_{1011}(0),$$

$$\mathrm{Re}\ P_{21}(0)=\mathrm{Re}\ H_{1110}(0),\quad \mathrm{Re}\ P_{12}(0)=\mathrm{Re}\ H_{0021}(0).$$

$R_k(\beta)$是真正的平滑函数。$S_1(0)$和$S_2(0)$公式较长，可以在 Kuznetsov（1999）中找到；MATCONT 软件可以自动计算这些系数。

在极坐标$(\tau_k, \varphi_k), k = 1,2$中，Gavrilov 的标准形式为：

$$\begin{cases} \dot{r}_1 &= r_1(\beta_1 + p_{11}(\beta)r_1^2 + p_{12}(\beta)r_2^2 + s_1(\beta)r_2^4) + O((r_1^2+r_2^2)^3), \\ \dot{r}_2 &= r_2(\beta_2 + p_{21}(\beta)r_1^2 + p_{22}(\beta)r_2^2 + s_2(\beta)r_1^4) + O((r_1^2+r_2^2)^3), \\ \dot{\varphi}_1 &= \omega_1(\beta) + O(r_1^2+r_2^2), \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2(\beta) + O(r_1^2+r_2^2), \end{cases} \tag{4}$$

其中， $P_{kj}(\beta) = Re\ \ P_{kj}(\beta)$，$S_k(\beta) = Re\ \ S_k(\beta)$，$k,j = 1,2$，$\varphi_k$的$O$项的周期为$2\pi$。

标准形式的分岔图还取决于O项，但其一些重要特征是由五阶振幅系统确定的。

$$\begin{cases} \dot{r}_1 &= r_1(\beta_1 + p_{11}(\beta)r_1^2 + p_{12}(\beta)r_2^2 + s_1(\beta)r_2^4), \\ \dot{r}_2 &= r_2(\beta_2 + p_{21}(\beta)r_1^2 + p_{22}(\beta)r_2^2 + s_2(\beta)r_1^4). \end{cases} \tag{5}$$

该系统满足某些额外通用性条件的局部分岔图可以在 Kuznetsov（2004，Sec.8.6.2）中找到。在（5）中，正平衡表现为 Andronov-Hopf 分岔，为一个极限环。该极限周期对应于截断的标准形式（4）的 3D 不变圆环。该环面的破坏是O项引起的，同时形成一个复杂的不变面集。

其他情况

Hopf-Hopf 分岔也发生在 **PDEs (偏微分方程组)** 和 **DDEs (时滞微分方程组)** 生成的无限维 **ODEs** 中，且中心流形定理也适用。

参考文献

1、 N.K. Gavrilov (1980) Bifurcations of an equilibrium with two pairs of pure imagianry roots. In: "Methods of Qualitative Theory of Differential Equations", Gorkii, pp. 17-30 [in Russian].

2、 J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer.

3、 B.L.J. Braaksma and H.W. Broer (1982) , Quasi-periodic flow near a codimension one singularity of a divergence free vector field in dimension four. In: Bifurcation, Théorie Ergodique et Applications (Dijon, 1981), Astérisque, 98-99, 74-142.

4、 H.W. Broer (1983), Quasi-periodicity in local bifurcation theory, Nieuw Arch. Wisk. 4(1), 1-32. Reprinted in: Bifurcation Theory, Mechanics and Physics (eds. C.P. Bruter, A. Aragnol, A. Lichnérowicz), Reidel, 177-208.

5、 H.W. Broer and G. Vegter (1984) Subordinate Shilnikov bifurcations near some singularities of vector fields having low codimensions. Ergodic Theory Dynamical Sysems 4, 509-525.

6、 H.W. Broer (2003), Coupled Hopf-bifurcations: Persistent examples of n-quasiperiodicity given by families of 3-jets. Astérisque 286, 223-229.

7、 Yu.A. Kuznetsov (1999) Numerical normalization thechniques for all codim 2 bifurcations of equilibria in ODEs, SIAM J. Numer. Anal. 36, 1104-1124.

8、 Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer, 3rd edition.

内部文献

9、 Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.

10、 John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517.

11、 James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.

12、 Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014.

13、 Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375.

14、 Yuri A. Kuznetsov and Robert J. Sacker (2008) Neimark-Sacker bifurcation. Scholarpedia, 3(5):1845.

15、 James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.

16、 Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.

17、 Anatoly M. Samoilenko (2007) Quasiperiodic oscillations. Scholarpedia, 2(5):1783.

18、 Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.

19、 Emmanuil E. Shnol (2007) Stability of equilibria. Scholarpedia, 2(3):2770.

外部链接

也可看

Andronov-Hopf 分岔，鞍-结分岔，周期轨道的鞍-结分岔，分岔，中心流形定理，动力系统，平衡，MATCONT，常微分方程，

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich
评论者：匿名
接受日期： 2008-08-19 14:57:50 GMT