映射中的鞍-结分岔

尤里・A・库兹涅佐夫教授 (荷兰乌得勒支大学数学系)

离散时间动态系统(迭代映射)中的**鞍-结分岔**是生成映射的两个不动点的产生。此时临界定点具有特征值+1。这种现象也称为映射的折叠或极限点分岔。该分岔是 ODEs 中鞍-结分岔的离散形式，其中**平衡**具有一个零特征值。

定义

具有离散时间（迭代映射）的动力系统由以下映射生成：

$$x \to f(x,\alpha), x \in R^n$$

该系统取决于参数$\alpha \in R$，其中f是光滑的。

- 假设在$\alpha = 0$时，系统有固定点$x^0 = 0$。
- 进一步假设其雅可比矩阵$A_0 = f_x(0,0)$具有特征值$\lambda_1 = 1$。

一般情况下，当 $\alpha = 0$时，两个固定点变为一个临界固定点（详见图 1）。该分岔的特征在于分岔条件仅有$\lambda_1 = 1$（具有一维性），并且一般出现在具有单参数族的平滑映射中。临界固定点x^0是等式$f(x,0) = x$的多重（双重）根。

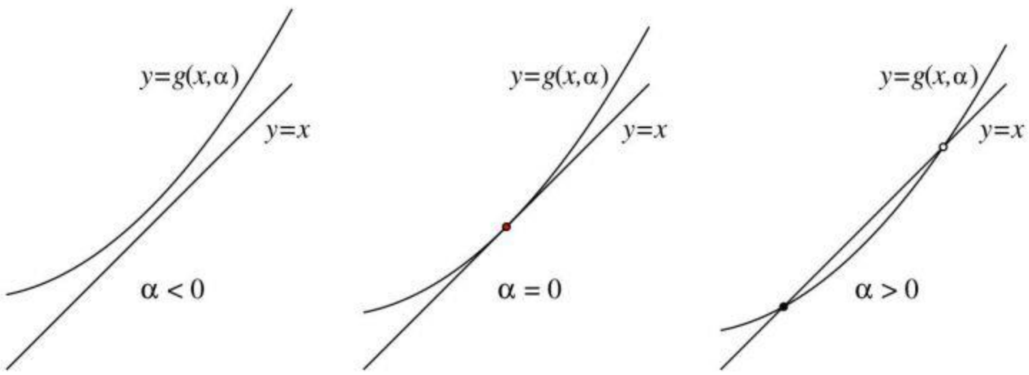

图 1 映射$x \to g(x,\alpha) = x^2 + x - \alpha$的鞍结分岔

一维案例

为了解析地分析分岔，假设上面的映射中$n = 1$时，

$$x \to f(x,\alpha), x \in R$$

Yuri A. Kuznetsov (2008), Scholarpedia, 3(4):4399 doi:10.4249/scholarpedia.4399

此时的分岔条件为$f_x(0,0)=1$，如果满足以下**非退化**条件：

- $(NS.1)$ $\alpha(0)=\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)\neq 0$；
- $(NS.2)$ $f_\alpha(0,0)\neq 0$

那么这个单参数族的映射（参数为α）在原点附近与以下单参数族映射（参数为β）共轭，如下所示：

$$y\to\beta+y+\sigma y^2$$

其中，$y\in R$，$\beta\in R$，$\sigma=sign\ \ a(0)=\pm 1$。后面一族映射被称为标准形态的鞍结分岔（虽然它不具有该文章意义上的标准形态）。

多维案例

在$n\geq 2$的n维实例中，鞍结分岔中雅可比矩阵A_0有一下特征：

- 一个简单的特征值$\mu_1=1$，
- 当$|\mu_j|<1$时，有特征值n_s
- 当$|\mu_j|>1$时，有特征值n_u，且$n_s+n_u+1=n$。

根据中心流形定理，原点处存在一族平滑的一维不变流形W_α^c。受限于W_α^c的n维映射是一维的，因此具有上述标准形式。

二次项系数

非简并条件$(NS.1)$的二次项系数$a(0)$可以按照如下方式进行计算$n\geq 1$。将$f(x,0)$在$x=0$处进行泰勒展开，如下所示：

$$f(x,0)=A_0x+\frac{1}{2}B(x,x)+O(||z||^3)$$

其中$B(x,y)$和为多线性函数，如下所示：

$$B_j(x,y)=\sum_{k,l=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f_j(\xi,0)}{\partial\xi_k\partial\xi_l}\right|_{\xi=0}x_k y_l$$

其中，$j=1,2,\ldots,n$。令$q\in R^n$为A_0的临界特征向量，使得$A_0q=q,\langle q,q\rangle=1$。$\langle p,q\rangle=p^Tq$为$C^n$的内积。引入伴随矩阵$p\in R^n$，使得$A_0^Tp=p,\langle p,q\rangle=1$，因此有：

$$a(0)=\frac{1}{2}\langle p,B(q,q)\rangle=\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2}\langle p,f(\tau q,0)\rangle\bigg|_{\tau=0}$$

标准分岔软件（例如 MATCONT）可以自动计算$a(0)$的值。

其他情况

当映射在N次迭代后发生鞍结分岔时，通常可以得到关于迭代次数N的两个周期轨道（或周期）。如果由 ODE 定义的 Poincare 映射（或其迭代）发生鞍结分岔，则形成两个极限环。

参考文献

1、 V.I. Arnold (1983) Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Grundlehren Math. Wiss., 250, Springer

2、 D. Whitley (1983) Discrete dynamical systems in dimension one and two. Bull. London Math. Soc. **15**, 177-217.

3、 J. Guckenheimer and P. Holmes (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer

4、 Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition.

5、 S. Newhouse, J. Palis and F. Takens (1983) Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **57**, 5-71.

内部文献

6、 John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517.

7、 Yuri A. Kuznetsov (2007) Conjugate maps. Scholarpedia, 2(12):5420.

8、 James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.

9、 Eugene M. Izhikevich (2007) Equilibrium. Scholarpedia, 2(10):2014.

10、 Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375.

11、 James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.

12、 Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.

13、 Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

外部链接

也可看

流形中的鞍-结分岔，分岔，中心流形定理，动力系统，不动点，MATCONT，

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2008-02-11 23:16:23 GMT