

Neimark-Sacker 分岔

尤里·A·库兹涅佐夫教授 (荷兰乌得勒支大学数学系)

罗伯特·萨克博士 (南加州大学数学系)

Neimark-Sacker 分岔就是一**闭合不变曲线**的出现。在具有离散时间（迭代映射）的动力学系统中，当一定点的稳定性通过一对复杂的具有单位模量的特征值发生变化时，便得到了此闭合不变曲线。此分岔可以是超临界或亚临界的，分别对应着稳定的或不稳定的（在不变的二维流形内）闭合不变曲线。当分岔出现在极限环的庞加莱映射中时，会在相应的 ODE 中生成不变的二维环面。

定义

一个映射

$$x \rightarrow f(x, \alpha), x \in R^n$$

取决于于参数 $\alpha \in R$ ，其中 f 是光滑的。

- 假设对于所有足够小的 α ，系统都有一族固定点 $x^0(\alpha)$ 。
- 进一步假设其雅可比矩阵 $A(\alpha) = f_x(x^0(\alpha), \alpha)$ 具有一对复特征值

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\theta(\alpha)}$$

在单位圆上，当 $\alpha = 0$ 时， $r(0) = 1$ ， $0 < \theta(0) < \pi$ 。然后，一般情况下当 α 通过 $\alpha = 0$ 时，固定点的稳定性发生改变，唯一的闭合不变曲线从中分岔。该分岔的特征在于单个分岔条件 $|\lambda_{1,2}| = 1$ （具有一维维数），并且一般出现在光滑映射的单参数族中。

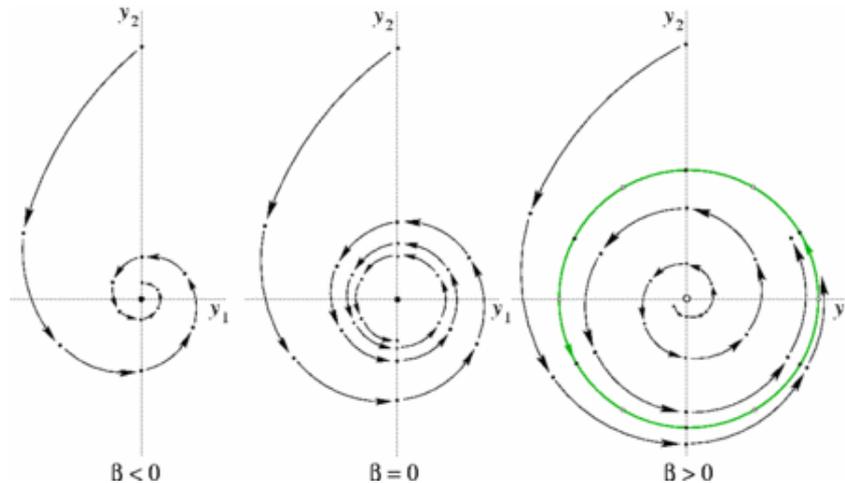


图 1 二维平面内的超临界 Neimark-Sacker 分岔

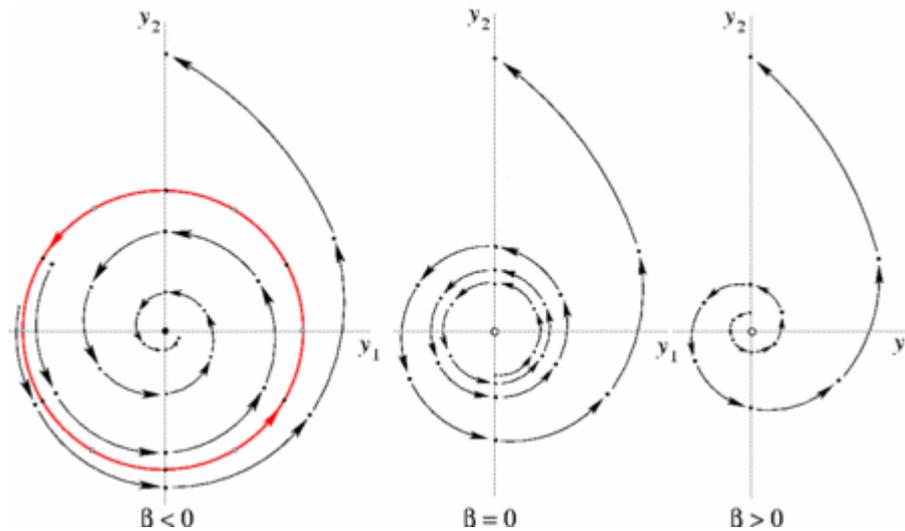


图 2 二维平面内的亚临界 Neimark-Sacker 分岔

二维案例

为了从分析角度了解分岔，当上面的映射中 $n = 2$ 时，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(x_1, x_2, \alpha) \\ f(x_1, x_2, \alpha) \end{pmatrix}$$

如果满足以下非退化条件：

- 当 $k = 1, 2, 3, 4$ 时，且 $\theta_0 = \theta(0)$ （没有强烈的共鸣）， $(NS.1)e^{ik\theta_0} \neq 1$ ；
- $(NS.2)r'(0) \neq 0$

此映射在固定点附近与标准形式局部共轭，可以使用复坐标 $z = y_1 + iy_2$ 表示，如下所示：

$$z \rightarrow (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}z + c(\beta)z|z|^2 + O(|z|^4)$$

其中， $y = (y_1, y_2)^T \in R^2$ 和 $\beta \in R$ 为新参数，参见 Iooss(1979) 或 Arnold(1983)。

此外，如果

- $(NS.3)d(0) = \text{Re}[e^{-i\theta_0}c(0)]$ ，其中 $d(0)$ 是第一 Lyapunov 系数(见下文)，

那么

- 当 $d(0) < 0$ 时，标准形式在原点处有一个固定点，固定点在 $\beta \leq 0$ 时是渐近稳定的 ($\beta = 0$ 时变化趋势较弱)；在 $\beta > 0$ 时，不稳定。此外，对于 $\beta > 0$ 存在唯一且稳定的闭合不变曲线，其半径为 $O(\sqrt{\beta})$ 。这是超临界 Neimark-Sacker 分岔 (如图 1 所示)。

。当 $d(0) > 0$ 时,标准形式在原点处的固定点在 $\beta < 0$ 时是渐近稳定的;在 $\beta \geq 0$ 时,不稳定($\beta = 0$ 时变化趋势较弱)。并且,对于 $\beta < 0$ 存在唯一且稳定的闭合不变曲线,其半径为 $O(\sqrt{-\beta})$ 。这是亚临界 Neimark-Sacker 分岔(如图 2 所示)。

请注意,某些书籍中给出了错误的非简并性条件 $Re[c(0)] \neq 0$,而不是(NS.3)。应用这一错误条件,会得出关于变化方向和闭合不变曲线的稳定性的错误结论。

阿诺德舌头

对于固定参数值,闭合不变曲线的平滑度是有限的,即使初始映射是无限可微的。但如果 $\beta \rightarrow 0$,曲线光滑度增加。标准形式中的 $O(|z|^4)$ 项不能被截断,因为它们会影响闭合不变曲线上的轨道结构。这些项何时出现通常取决于 $arg(z)$,这就导致不变曲线上的轨道可以是稠密分布的,也可以是只有有限数量的周期性轨道。轨道结构随 β 值改变。在某些开发参数下,存在两个周期性轨道,轨道为相互间隔的,且在通过映射中的鞍结分岔边界时轨道消失。通用映射在 Neimark-Sacker 分岔附近有无限数量的闭合不变曲线中的循环分岔,对应于无数此类区间的边界。

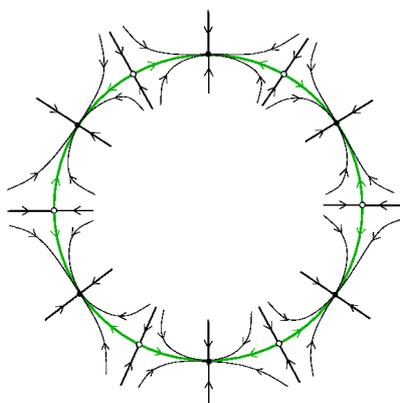


图 3: 包含一个稳定的 6 周期和一个不稳定的 6 周期的闭合不变曲线,显示为映射中的 6 个迭代固定点。

令 $\lambda = \lambda_1$,且 $Re \lambda$ 和 $Im \lambda$ 为独立新参数,在这些参数的平面上,单位圆 $|\lambda| = 1$ 对应于 Neimark-Sacker 分岔。远离强共振并假设分岔是超临界的,我们在单位圆之外得到了参数的稳定闭合不变曲线 $Re \lambda, Im \lambda$ 。闭合不变曲线上存在的成对的周期轨道的参数区域,在所有有理数点处都接近单位圆

$$\lambda = e^{i\theta}, \theta = \frac{2\pi p}{q}$$

其形似舌头，宽度为 $O((|\lambda| - 1)^{(q-2)/2})$ 。这些阿诺德舌头以周期性的鞍形节点分岔曲线为界线。不同于 Neimark-Sacker 分岔，阿诺德舌头的曲线可以相交。在这样的参数值下，不存在闭合不变曲线，而是存在两个独立的鞍形节点分岔，且无相关的远程周期。

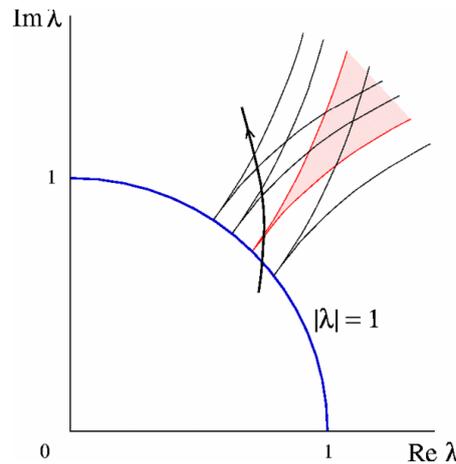


图 4: Neimark-Sacker 分岔附近的 Arnold Tongues。

多维案例

在 $n \geq 3$ 的 n 维实例中，雅可比矩阵 $A_0 = A(0)$ 一般有

- 一对简单的临界特征值 $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ，其中 $e^{ik\theta_0} \neq 1$ ， k 取 1, 2, 3 和 4。
- 当 $|\lambda_j| < 1$ 时，有特征值 n_s
- 当 $|\lambda_j| > 1$ 时，有特征值 n_u ，且 $n_s + n_u + 2 = n$ 。

根据映射的中心流形定理，原点处存在一族平滑的二维不变流形 k_α^c 。受限于 k_α^c 的 n 维映射是二维的，因此具有上述标准形式，并证明了上述分岔。

第一李雅普诺夫系数

Neimark-Sacker 分岔是亚临界还是超临界的，是由第一李雅普诺夫系数中 $d(0)$ 的符号决定的。 $\alpha = 0$ 时，该系数按照如下方式进行计算。令 $x^0(0) = 0$ ，将 $f(x, 0)$ 在 $x = 0$ 处进行泰勒展开，如下所示：

$$f(x, 0) = A_0 x + \frac{1}{2} B(x, x) + \frac{1}{6} C(x, x, x) + O(\|z\|^4)$$

其中 $B(x, y)$ 和 $C(x, y, z)$ 为多线性函数，如下所示：

$$B_j(x, y) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_k y_l$$

$$C_j(x, y, z) = \sum_{k,l,m=1}^n \frac{\partial^3 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \Big|_{\xi=0} x_k y_l z_m$$

其中， $j = 1, 2, \dots, n$ 。令 $q \in C^n$ 为 A_0 与 $e^{i\theta_0}$ 的复特征向量，即 $A_0 q = e^{i\theta_0} q$ 。引入伴随矩阵 $p \in C^n$ ，使得 $A_0^T p = e^{-i\theta_0} p$ ，有 $\langle p, q \rangle = 1$ 。 $\langle p, q \rangle = p^{-T} q$ 为 C^n 的内积，因此有：

$$c(0) = \frac{1}{2} \left[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle + 2 \langle p, B(q, (I_n - A_0)^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle \right. \\ \left. + \langle p, B(\bar{q}, (e^{2i\theta_0} I_n - A_0)^{-1} B(q, q)) \rangle \right]$$

式中 I_n 为 $n \times n$ 的单位矩阵， $d(0) = \text{Re}[e^{-i\theta_0} c(0)]$ 。

Iooss 等人（1981）首先使用渐近展开式表示分支闭合不变曲线，得出了与上述公式等效的公式，而在 Kuznetsov（2004）的研究中可以找到基于中心流形减少量的推导。需注意的是 $d(0)$ 的值（而不是符号）取决于特征向量 q 的系数。对 $\langle p, q \rangle = 1$ 进行归一化可以消除这种歧义。标准分岔软件（例如 MATCONT）可以自动计算 $d(0)$ 的值。

环面分岔

假设 Neimark-Sacker 分岔发生在 ODE 中极限环的庞加莱映射中，对应于极限环的固定点具有一对简单特征值 $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ，以上所有通用条件都成立。则循环中分岔出一个独特的二维不变圆环，同时稳定性发生了改变。圆环与庞加莱截面的交点对应于闭合不变曲线。环形分岔有时称为**次要 Hopf 分岔**。

圆环分岔可发生在 fold-Hopf 分岔附近，并且在 fold-Hopf 分岔附近 ODE 中总是存平衡点。

强共振

极限循环的圆环分岔是 Andronov 发现的。Neimark（1959）发表的第一篇关于分岔的论文中包含一个错误：他低估了强共振的作用，并错误地忽略了相应的

非简并条件。而这些条件不仅仅是技术性的，因为在共振附近，可能会出现多个闭合的不变曲线，也可能根本不存在这样的曲线。Sacker (1964) 独立地发现了分岔，并给出了在没有所有强烈共鸣的情况下的第一个完整证明。关于两参数现象的现代强共振理论请参见 Arnold (1983)。

参考文献

- 1、 Ju.I. Neimark (1959) On some cases of periodic motions depending on parameters. Dokl. Akad. Nauk SSSR 129, 736-739 [in Russian].
- 2、 R. Sacker (1964) On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. Report IMM-NYU 333, New York University.
- 3、 G. Iooss (1979) Bifurcations of Maps and Applications, North Holland, Amsterdam.
- 4、 G. Iooss, A. Arneodo, P. Couillet, and C. Tresser. Simple computation of bifurcating invariant circles for maps. In: D. Rand and L.-S. Young (eds.) "Dynamical Systems and Turbulence", Lecture Notes in Mathematics 898 (1981), 192-211.
- 5、 V.I. Arnold (1983) Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Grundlehren Math. Wiss., 250, Springer.
- 6、 L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, and L.O. Chua (2001) Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II, World Scientific.
- 7、 Yu.A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition.

内部文献

- 8、 John Guckenheimer (2007) Bifurcation. Scholarpedia, 2(6):1517.
- 9、 Andrey Shilnikov and Dmitry Turaev (2007) Blue-sky catastrophe. Scholarpedia, 2(8):1889.
- 10、 James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.
- 11、 John Guckenheimer and Yuri A. Kuznetsov (2007) Fold-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 2(10):1855.
- 12、 Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, Bart Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375.

13、 Yuri A. Kuznetsov (2008) Saddle-node bifurcation for maps. Scholarpedia, 3(4):4399.

14、 Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

外部链接

也可看

[分叉](#), [中心流形定理](#), [动力系统](#), [不动点](#), [MATCONT](#)

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2008-05-26 11:54:38 GMT